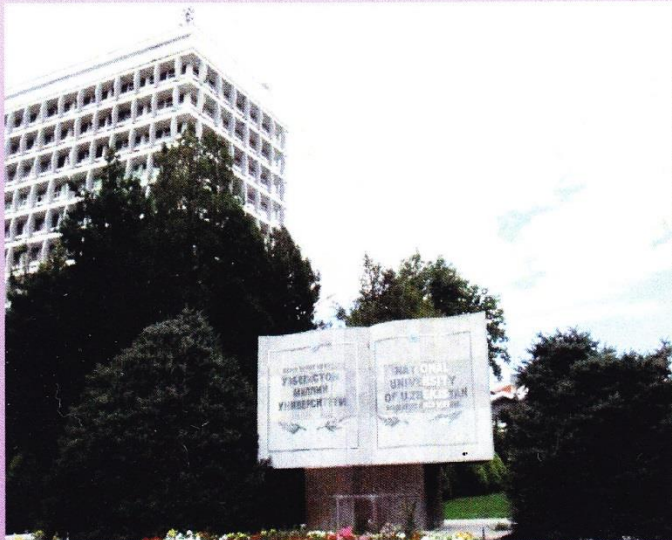




מכון טכנולוגי חולון
Holon Institute of Technology



ABSTRACTS

of the Uzbek-Israel International
Scientific Conference

CONTEMPORARY PROBLEMS IN MATHEMATICS AND PHYSICS

OCTOBER 6-10, 2017

TASHKENT

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

HOLON INSTITUTE OF TECHNOLOGY

ABSTRACTS

of the Uzbek-Israel International Conference

CONTEMPORARY PROBLEMS IN MATHEMATICS AND PHYSICS

October 6–10, 2017

TASHKENT

Contemporary Problems in Mathematics and Physics: Abstracts of the Uzbek-Israel International Conference (October 6–10, 2017, Tashkent).

National University of Uzbekistan (NUUz) and Holon Institute of Technology (HIT) are pleased to announce a joint conference in “Contemporary Problems in Mathematics and Physics” to be held in National University of Uzbekistan, Tashkent, October 6-10, 2017. The conference topics:

- Complex Analysis and Function Theory;
- Algebra, Functional Analysis and Topology;
- Applied Mathematics, Computational Geometry;
- Computer Science, Operations Research, Design and Analysis of algorithms;
- Digital medical science, Health informatics;
- Theoretical and mathematical high energy physics, string field theory. Physics biotechnology.

Scientific Committee

Chairmen:

Avaz Marakhimov – Rector of NUUz

Eduard Yakubov – President of HIT

Vice-Chairmen:

Azimbay Sadullaev (NUUz)

David Shoikhet (HIT)

Science Secretary:

Jasurbek Karimov (Institute of Mathematics)

Members:

Rakhmatullo Aloev (NUUz)

Mirsaid Aripov (NUUz)

Shavkat Ayupov (Institute of Mathematics)

Shuxrat Boymurodov (Tashkent Medical Academy)

Vladimir Chilin (NUUz)

Anatoly Golberg (HIT)

Shavkat Madrakhimov (NUUz)

Dilbar Mirzaaxmedova (NUUz)

Shavkat Otajonov (NUUz)
Alex Samorodnitsky (Hebrew University)
Mahroy Saidalieva (TUIT)
Yosef Yomdin (Weizmann Institute of Science)
Hakimjon Zaynidinov (TUIT)

Technical editors:

Jasurbek Karimov (Institute of Mathematics)
Sukrot Kurbonboev (NUUz)

Organizing Committee

Chairman:

Nasriddin Jabborov – Head of Faculty of Mathematics

Members:

Shavkat Akhmedov (NUUz)
Ruzinazar Beshimov (NUUz)
Kakhramon Davronov (NUUz)
Davlatbay Djumabaev (NUUz)
Bakhodir Eshchanov (NUUz)
Aviv Gibali (ORT Braude College)
Javlon Karimov (NUUz)
Michael Kroyter (HIT)
Abdulla Kushakov (NUUz)
Tolib Otabaev (NUUz)
Zafar Rakhmonov (NUUz)
Jura Tishabaev (NUUz)
Aleksandr Veksler (Institute of Mathematics)

Sponsors

National University of Uzbekistan
UCD Micros, Veksler A. S.
Grant №52, Kushakov A.

CONTENTS

Abdullaeva Z. Sh. Non-linear effects in the evolution process thermal structures . .	10
Abdullaev B. I., Sharipov R. A. Removed singularities of \widehat{m} -subharmonic functions	11
Abduvaliev A. A., Gildieva M. S., Saidalieva M., Hidirova M. Possibilities of mathematical modeling of the regulatorycs of the immune system in carcinogenesis .	13
Abduvaliev A. A., Gildieva M. S., Saidalieva M., Hidirova M. Use of the computer model in the study of the dynamics of proliferation of cells in organism ...	14
Agranovsky M. Mathematics of a hybrid type tomography	16
Agranovsky M. On algebraically integrable domains	16
Ahmadaliev G. N., Hayotov A. R. The discrete analogue of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2\omega^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \omega^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$	17
Aminov B. R., Chilin V. I. An isometric extension problem in ideals of compact operators	19
Aripov M. Critical exponents in nonlinear degenerate parabolic equations and systems	22
Aripov M., Mukimov A. Asymptotic solution for nonlinear degenerate parabolic equations with variable coefficients in the second critical exponent case	23
Aripov M., Rakhmonova M. Y. Solution the second order degenerate type nonlinear parabolic equation using the Hamilton-Jacoby equation	25
Artikbayev A. The geometry of half-Euclidian space as subspace of pseudo-Euclidian space and in sense of foliations	27
Ashurova D., Raimova M., Yuldasheva M. Application of methodology of basic problem at learning of mathematics and software disciplines	29
Atamuratov A., Kamolov Kh. Polynomials on parabolic manifolds defined as a complement of algebraic sets	30
Ayupov Sh., Arzikulov F. 2-local derivations on Lie algebras of skew-adjoint infinite dimensional operators	32
Ayupov Sh., Kudaybergenov K., Omirov B., Zhao K. Semisimple Leibniz algebras and their derivations and automorphisms	36
Azizov A. N., Chilin V. I. Almost uniform convergence in the individual ergodic theorem	39
Barak R. Y. Digital health - Big Data and IoT (Internet of Things)	41
Ber A. F., Chilin V. I. Laterally complete commutative regular algebras	42
Beshimov R. B., Mukhamadiev F. G. The π -weight and density of N_r^φ -kernel of a topological space X	46
Boltaev N. D. Optimal quadrature formulas for approximate calculation of Fourier coefficients in a Hilbert space	47

Boltaev T. B. About the approach of application of mathematical apparatus for morphological analysis of analytical languages	50
Boymuradov Sh. A., Bobamuratova D. T., Akramova N. T. Sub-analysis of the rations of patients with mandibular fractures	51
Bshouti D. Harmonic mappings via real and complex analysis: 30 years later	53
Chilin V. I., Karimov J. A. Isomorphic classification of $C_\infty(Q)$ -modules $l_p(Q)$...	53
Chilin V. I., Litvinov S. N. Local ergodic theorems in symmetric spaces of measurable operators	56
Chilin V. I., Veksler A. S. Mean ergodic theorem in symmetric spaces on infinite measure space	59
Elin M. Holomorphic semicycles in Banach spaces	62
Fayazova Z. K. The Dirichlet problem for a mixed type pseudo-differential equation	62
Gibali A. Speedup of lexicographic optimization by superiorization and its applications to cancer radiotherapy treatment	64
Golberg A. Strengthened bounds of Teichmüller-Wittich-Beliskiyi theorems in higher dimensions	64
Hasanov A. A. Computer modeling interaction of thyroid gland follicle cells	65
Ibragimov A. A., Tokhirov F. J. Interval Gauss-Seidel method for calculation of the set modes of electric systems	66
Ikromov I. A. Boundedness of maximal operators associated to hypersurfaces	69
Jabborov N. M., Otaboev T. U. Analogue of the Weierstrass theorem for $A(z)$ -analytical functions	71
Jamilov U. U. Regularity of a Volterra cubic stochastic operator	73
Karpova O., Abduvohitov H., Rakhmanov S. Second harmonic generation in a time-dependent optical trap	75
Khojimurodova M. Finite speed perturbation distribution and spatial localization for the double nonlinear parabolic equation with source or absorption	76
Kroyter M. String theory: motivation, consequences and challenges	77
Laikhtman A., Makrinich G., Sezen M., Martinez J. I., Alonso J. A., Enachescu M., Zak A. Tungsten disulfide nanoparticles as a medium for hydrogen storage: comparison of hydrogenation methods and determination of chemical configuration	78
Lifyand E. Asymptotic relations for the Fourier transform of a function of bounded variation	79
Luna-Elizarrarás M. E. On the notion of conformality in the four dimensional space based on bicomplex numbers	80
Makhmudjanov S. Spline method biomedical signal processing	80

Matrasulov D. M., Yusupov J. R. Network of quantum harmonic oscillators	82
Matyakubov A. Estimates and asymptotic solutions for a nonlinear parabolic system not in divergence form with variable density	84
Muminov G. M. Xasanova M. M. About a common solution of the differential equation second order with involution	85
Nurillaev M. E., Rakhimov A. A. Real analogue of Ge-Kadison's splitting theorem	86
Orumbayeva N. T., Jenaliyev M. T., Iskakov S. A. On the homogeneous Solonnikov-Fasano problem in a non-cylindrical domain	88
Pallellappa Ch., Grinberg O., Biro R. P., Bruiser V., Zussman E., Livneh T., Zak A. Inorganic nanotubes of MoS_2 and WS_2 : their synthesis, properties and applications	90
Pinhasov A. Technology transfer insights in academic research and personalized medicine	90
Rakhimov D. G. Reductional method in perturbation theory of generalized spectral E. Schmidt problem	92
Rakhmanov S., Matrasulov D., Matveev V. Quantum dynamics of atom confined time-dependent trap	94
Rakhmonov Z. R., Tillaev A. I. Numerical investigation of a fourth-order equation from thin film flow	97
Ramazanov M. I., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T. To solving the singular Volterra integral equation	98
Rapoport L. Friction and wear of solid lubricant nanoparticles. Theory and applications	100
Rasulov A. S., Raimova G. M., Bakoyev M. T., Rahmatov M. Y. Monte Carlo method for calculation the price of multi-asset options	101
Sadullaeva Sh. A. To the numerical and asymptotical investigation of system reaction diffusion with double nonlinearity	103
Saidalieva M., Hidirova M. Regulatorika of biological excitable media	104
Sattorov E. N., Ermamatova Z. E. Quaternionic Cauchy integral formula for α -hyperholomorphic functions	106
Sedov S. S. Threshold theorems for generalized epidemic size in a new Markovian epidemic model with immunization	108
Sergeev A. Universal Teichmüller space as a non-trivial example of infinite-dimensional complex manifolds	110
Shakarov A. R. Computer modeling of skin epidermis activity	110
Shapiro M. On an approach to the theory of bicomplex holomorphic functions	111
Shoikhet D. Old and new in complex dynamical systems	112

Shopulatov Sh. Sh. On a generalized Laplace operator	113
Tashpulatov S. M. Structure of essential and discrete spectrum of the energy operator of three-electron systems in the impurity Hubbard model	115
Turgunov A. M. Computer modeling of regulatory mechanisms of liver cells and hepatitis B viruses	117
Tuychiyev T. T. About domains of convergence of Hartogs and Jacobi-Hartogs lacunary series	119
Yakubov E. The Beltrami equation and related classes of mappings	121
Yomdin Y. Smooth parametrizations, their old and new applications, and connections to singularity theory	122
Yuldashev Z., Ibragimov A., Kalkhanov P., Fayzullaev M. Mathematical model of planning of lands and distribution of agricultural resources on them	122
Yusupova Z. Dj. Qualitative analysis of the mathematical model of cardiac regulatorika	123
Yusupov I. Haar-Wavelet multidimensional signal processing method	126
Zaynidinov H., Yusupov I. Piecewise-polynomial basis functions for computing problems in biomedical signal processing	127
Абдурахимов Б. Ф., Саттаров А. Б. Шифрлаш алгоритмлари учун максимал тарқатиш хусусиятига эга бўлган акслантиришларни ишлаб чиқиш	129
Акимченко А. А., Гурская А. В., Долгополов М. В., Кузнецов О. В. Бетавольтаический источник питания для пейсмейкеров	132
Аллаков И., Собиров А. Дирихле L -функциясининг комплекс ноллари тўғрисида	134
Алоев Р. Д., Худойберганов М. У., Мингбаева А., Бомуродов Ш. Исследование устойчивости разностных схем для линейных гиперболических систем	136
Арипов М., Утебаев Д. Схемы повышенной точности для одной обратной задачи нестационарной теплопроводности	138
Аслонов Ж. О. Ограниченность секционной кривизны многообразия $S^3 \times R$..	140
Бахромов С. А. Сплайн-функция ёрдамида интеграл тенгламани тақрибий ечиш ..	143
Бешимов Г. Р. Обобщенное топологическое пространство	144
Бешимов Р. Б., Мамадалиев Н. К. Функтор радоновых функционалов OS_R ..	145
Боймурадов Ш. А., Юсупов Ш. Ш. Использование компьютерной программы "PiPO" для прогнозирования и профилактики осложнений у больных с сочетанной травмой костей лицевого скелета	147
Вайсова М. Д. Емкости в классе α -субгармонических функций	149
Ганихаджаев Р. Н., Таджиева М. А., Эшимбетов М. Р. Карта неподвижных точек нелинейных отображений симплекса на себя	151

Голенев Е. А., Гурская А. В., Долгополов М. В., Рыкова Э. Н. Потенциал Хиггса в неминимальной суперсимметричной модели при температуре фазового перехода	152
Дадажанов Р. Н., Касымов Н. Х. Эффективно равномерная отделимость вычислимых сечений негативных плотных линейных порядков	155
Евсютин. О. О., Кабулов А. В., Мещеряков Р. В. Исследование параметров алгоритма оптимизации на основе клеточного автомата с целевой функцией	157
Жураев Т. Ф., Турсунова З. О., Жувонов К. Р. О некоторых свойствах подфунктора P_f функтора P вероятностных мер имеющих конечные носители не обладающий конечной степени	159
Икрамов А. А., Азимова Н. А., Ташкенбаева Н. Ф., Тригулова Р. Х. Оценка динамики прогрессирования стабильной стенокардии в зависимости от приверженности к терапии больных в клинической практике: отбор признаков в модель прогноза	161
Имомкулов С. А., Абдикадиров С. М. Принудительное продолжение тонкоаналитических функций многих комплексных переменных	164
Имомкулов С. А., Хужамов Ж. У. Аналитическое продолжение функций вдоль параллельных алгебраических кривых	165
Имомназаров Б., Имомназаров Х. Об одной задаче для одномерной нелокальной системы, возникающей при разрушении горных пород	167
Имомназаров Х. Х., Мамасолиев Б. Ж. Об одной системе типа Бюргерса возникающей в двухжидкостной среде	170
Имомназаров Х. Х., Мамасолиев Б. Ж. Об одном частном решении системы уравнений возникающей в двухжидкостной среде	172
Имомназаров Х. Х., Туйчиева С. Т. Обратная динамическая задача для системы пороупругости	173
Исмоилов Ш., Тиллаев Д., Юсупова З. Геометрия преобразований сохраняющих площадь или объем	175
Касымов Н. Х., Ибрагимов Ф. Н. Критерий вычислимости подкольца поля рациональных чисел	179
Касымов Н. Х., Ходжамуратова И. А. Характеризация негативно представимых линейных порядков с конечным числом предельных элементов	181
Кобилов С. С., Раббимов И. М. Некоторые алгоритмы решения задач узбекской компьютерной лингвистики	183
Кулдошев Х. М. Экспоненциально-алгебраическая интерполяционная формула	185
Курьязов Д. М. Асимметрик алгоритмларни амалиётда қўллаш билан боғлиқ муаммолар ва улар ечимлари	186

Маматова Х. Х. Решение полиномиальных уравнений алгоритм ElimLin	188
Нарманов А. Я., Саитова С. Геометрия множества достижимости	191
Нарманов О. А. Алгебра Ли группы симметрий уравнения теплопроводности .	195
Неъматова Д. Э. Система обеспечения целостности АИС работающих на основе СУБД	199
Отемуратов Б. П. О голоморфном продолжении функций вдоль конечных семейств комплексных прямых в n -круговой области	201
Пренов Б. Б. Об одном каноническом представлении гармонических функции	203
Родионова И. Н., Долгополов В. М., Долгополов М. В. О дельта-задачах для обобщенного уравнений Эйлера–Дарбу	203
Садуллаев А. С., Ибрагимов Э. Ш. Продолжение функций из класса Гончара на всю плоскость	204
Сатторов Э. Н., Эрмаматова Ф. Э. Формула Карлемана для решений обобщенной системы Коши-Римана в многомерной пространственной области	206
Тахиров Ж., Умирханов М. О биологических моделях с таксисом	208
Тишабаев Ж. К. Инвариантные метрики в матричных областях	209
Тожибоев А., Қўчқоров Х., Умаров А. Elcut дастурининг фан ва таълимдаги ўрни	209
Тухтасинов М. Т. ε -Позиционные стратегии в первом прямом методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх	211
Ходиев Ш. И. Методы и алгоритмы теории преобразований в инженерии и языках программирования	213
Худайберганов Г. Об одном множестве в пространстве прямоугольных матриц	215
Худайберганов Г., Курбанов Б. Т. Об интегральных формулах в пространстве прямоугольных матриц	216
Шадиметов Х. М., Нуралиев Ф. А. Коэффициенты оптимальных интерполяционных формул пятой степени	218
Эшимбетов М. Р., Таджиева М. А. Динамика квадратичных отображений эллиптического типа	221
Эшмаматова Д. Б., Ганиходжаев Р. Н. О понятии трансверсальности квадратичных стохастических операторов Вольтерровского типа	223
Юлдашев Э. Х., Ибрагимов А. А., Ходжабаев Ф. Д. Исследование глобальной устойчивости интервального варианта пятиточечной прогонки	224
Яхшибоев М. У. О дробном интегрировании Адамара в кусочно-степенных весовых пространствах суммируемых функций	227

NON-LINEAR EFFECTS IN THE EVOLUTION PROCESS THERMAL STRUCTURES

Abdullaeva Z. Sh.

Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan,
zamira85.05@mail.ru

In recent years, a number of important results have been obtained in the theory of nonlinear transport processes, taking into account the nonlinear properties of media. For example, in the theory of energy transfer, unusual inertial nonlinear effects that have no analogs in the linear theory of heat transfer are found. This includes effects of finite velocity of propagation and spatial localization of thermal perturbations, thermal self-isolation of structures, finite time of the existence of perturbations in nonlinear media with absorption, etc. [1] - [5].

The mathematical description of nonstationary heat conduction processes in such a nonlinear medium in the general case reduces to solving problems for the following quasilinear parabolic equation.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla \left(|\nabla u^k|^{p-2} \nabla u^k \right) - \text{div}(c(t)u) - u^\beta \\ u(0, x) &= u_0(x) \geq 0, \quad x \in R^N \end{aligned} \quad (1)$$

where $N \geq 1, p \geq 2, 0 < \beta < 1$, the function $c(t)$ is a speed of convective transfer. Physically, this form of the minor term of equation (1) corresponds to the presence in the nonlinear medium of the convective transfer with time depended speed $c(t)$, volumetric absorption of thermal energy, the specific power of which depends on the temperature, and is power-law explicitly on time. In the work [1] when $u(x, 0) = \delta(x), x \in R^N, \beta = (2 - m)/(p - 1)$ author construct exact solution which have a new nonlinear effects.

In the present work, these effects are studied when considering the process of heat transfer in an incompressible medium, the coefficient of thermal conductivity of which depends on the temperature under action of the convective transfer with time depended speed $c(t)$. We construct an exact solution of the problem (1). In particular we showed that the influence of speed of a convective transfer to evolution of nonlinear heat conductivity process. It is established the following condition $\int_0^t c(y) dy < \infty$ for a spatial localization of solution of the problem (1) when $u(x, 0) = \delta(x), x \in R^N, \beta = (2 - m)/(p - 1)$. Using comparison principle the estimate of solution to the problem (1) and effect of finite speed of perturbation is established. Results of Numerical experiments are discussed.

References

1. **Martinson L. K.** *Nonlinear effects in the process of evolution of thermal structures.* J. Comp. Math. and Math.Phys., 1984, Volume 24, Number 3, 462-467.
2. **Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurduomov S. P., Mikhajlov A.P.** *Blow-up in quasilinear parabolic equations.* Walter de Gruyter, 1995, 435.
3. **Juntang Ding, Hongjuan Hu.** *Blow-up solutions for nonlinear reaction diffusion equations under Neumann boundary conditions.* Applicable Analysis 2017, 96:4, 549-562.
4. **Aripov M., Sadullaeva Sh. A.** *Qualitative properties of solutions of a doubly nonlinear reaction-diffusion system with a source.* Journal of Applied Mathematics and Physics, 2015, 3, 1090-1099.
5. **Aripov M., Sadullaeva Sh. A.** *To properties of solutions to reaction-diffusion equation with double nonlinearity with distributed parameters.* J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2013, 6:2, 157-167.

REMOVED SINGULARITIES OF \widehat{m} – SUBHARMONIC FUNCTIONS.Abdullaev B. I.¹, Sharipov R. A.²¹Urgench State University, Urgench, Uzbekistan, abakhrom1968@mail.ru²Urgench State University, Urgench, Uzbekistan, sharipovr80@mail.ru

We consider closed (weakly) positive differential form ϕ of bidegree $(m - 1, m - 1)$, $1 \leq m \leq n$ in complex space \mathbb{C}^n .

Definition 1. Function $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ defined in domain $D \subset \mathbb{C}^n$ is called ϕ -subharmonic function in D if:

- 1) it is upper semi-continuous in D , i.e. $\overline{\lim}_{z \rightarrow z^0} u(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{B(z^0, \varepsilon)} u(z) \leq u(z^0)$;
- 2) the current $dd^c u \wedge \phi$ is positive in D , i.e.

$$dd^c u \wedge \phi(\omega) = \int u \phi \wedge dd^c \omega, \forall \omega \in F^{(n-m, n-m)}, \omega \geq 0.$$

Let's consider a case $\phi = (dd^c |z|^2)^{m-1}$. In this case second condition $dd^c u \wedge \phi \geq 0$ of definition 1 is equivalent that restrictions to a complex planes $u|_{\Pi} \in sh(\Pi \cap D) \quad \forall \dim \Pi = m$, i.e. $\phi = (dd^c |z|^2)^{m-1}$ – subharmonic functions are characterized by their subharmonicity on m -dimensional complex planes of \mathbb{C}^n . this class we denote by \widehat{m} – $sh(D)$.

This work is devoted to investigating singular sets of functions $\widehat{m} - sh$.

Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a domain and $F \subset D$ its' closed subset. Let $M \subset \widehat{m} - sh(D \setminus F)$ is a subclass, for example the class of bounded above by unit functions of the class $\widehat{m} - sh(D \setminus F)$. If $M \subset \widehat{m} - sh(D)$, the set F is called removable for the class M .

In recent works of A.Sadullaev and B.Abdullaev (see [3], [4]) there are studied removable singularities of bounded above $m - wsh$ functions and $m - wsh$ functions from the class Lip_α

The main results of the research are the following

Theorem 1. *The compact subset in F of the domain $G \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, is removable for functions $u(z) \in \widehat{m} - sh(G \setminus F) \cap L_{p,loc}^k(G)$ if and only if $C_{q,2-k}(F) = 0$, $k > 0$, $\frac{n}{n-2+k} \leq p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$.*

In last theorem it is required that $2 - k > 0$. It means that smoothness can be $0 < k < m$. In case $k = m$ it holds $k > 0$,

Theorem 2. *The compact subset F of a domain $G \subset \mathbb{C}^n$ is removable for functions $u(z) \in \widehat{m} - sh(G \setminus F) \cap L_{p,loc}^2(G)$, $p \geq 1$, if and only if it is the set of zero Lebesgue measure $m_n(F) = 0$.*

References

1. **Abdullaev B. I., Imomkulov S. A.** *Removable singularities of subharmonic functions from a class L_p and L_p^1* . Uzbek mathematical journal, - Tashkent, 1997, N4, pp.10-14. (in Russian)
2. **Abdullaev B. I., Yarmetov Z. R.** *On singular sets of subsolutions of elliptic operators*. Vestnik Kras GU, 2006, N9, pp.74-80 (in Russian)
3. **Abdullaev B., Sadullaev A.** *Removable singularities of $m - wsh$ functions of a class Lip_α* . Bulletin of National university of Uzbekistan, 2015, N1, pp.4-6. (in Russian)
4. **Abdullaev B., Sadullaev A.** *A removable singularities of the bounded above $m - wsh$ function*. Doklady of Academy of Science of Republic of Uzbekistan, 2015, N 5, pp. 12-14. (in Russian)

POSSIBILITIES OF MATHEMATICAL MODELING OF THE REGULATORYCS OF THE IMMUNE SYSTEM IN CARCINOGENESIS

Abduvaliev A. A.¹, Gildieva M. S.², Saidalieva M.³, Hidirova M.³

¹*Tashkent Medical Academy, Tashkent, Uzbekistan,*

²*National Cancer Research Center, Tashkent, Uzbekistan,*

³*Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies, Tashkent, Uzbekistan, regulatorika@yahoo.com*

Mathematical and computer modeling of the regulatorics of thyroid follicular allows to investigate the quantitative patterns of functioning of the cellular communities of follicular system during the synthesis of its main hormones and the mechanisms of disorders, leading to the emergence of various types of malignant neoplasms, to predict changes in proliferative activity of follicle cells in norm and pathology, and also to predict of proliferative behavior of the tissue depending on the quantitative vapor introduced meters. In this paper we present the results of computational experiments on the study of the dynamics of the proliferation of thyroid follicle cells in normal and in malignant neoplasm. A quantitative study of the regulatorics of the number of thyroid follicle cells was carried out on the basis of the mathematical modeling of the regulatory mechanisms of living systems and the regulator equations of the cellular communities of multicellular organisms using the concept of the functional unit of cellular communities - FUCC. It allows you to analyze the dynamics of the number of cells combined in the course of performing a general function in a holistic structural and functional formation consisting of groups of cells performing multiplication functions - M (the cells are in the fission phase), growth - B1, specialization - D, performing specific functions - S1, S2, ..., Sn and aging - B2.

The results of the analysis of the characteristic behavior of the computer model, obtained on the basis of a series of purposeful computational experiments, show the presence of a variety of regulator regimes of the number of thyroid follicle cells: rest (α), steady state (β), periodic (γ) and irregular oscillations (δ), and the existence of a sharp disruption of the vibrational solutions -the "black hole"effect (μ). Irregular oscillations and the "black hole"are identified by uncontrolled reproduction and a sharp destructive change in the number of cells of the thyroid follicle. Purposeful computational experiments with the computer model have shown that the successive increase in the multiplication parameter, observed with the growth of the load on the simulated system, leads to successive transitions $\beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \mu$, resulting in a sharp destructive disruption of the homeostasis of the thyroid gland cell system.

Conclusion. Existing medical and biological experimental data and theoretical statements on the structural and functional organization of the thyroid gland at the cellular level allow the construction of mathematical models for the quantitative analysis of the regulatorics of

the number of the thyroid follicular cell community in norm and in pathologies based on the method of modeling the regulatory mechanisms of living systems and the regulatorics of cellular communities. Model studies show that the chronic increase in the value of the multiplication parameter leads to an abnormal behavior of the number of the thyroid follicular cell community: a stationary state is disrupted, self-oscillations occur with transition to irregular oscillations with unpredictable multiplication of thyroid follicle cells and then to the effect of the "black hole".

References

1. **Hidirov B. N.** *Selected works on mathematical modeling of living systems regulatorika.* Moscow: Izhevsk, 2014, 304 p. (In Russ.).
2. **Hidirov B. N., Saidalieva M., Hidirova M. B.** *Regulatorika of living systems.* Fan va texnologiyalar, 2014, 136 p. (In Russ.).

USE OF THE COMPUTER MODEL IN THE STUDY OF THE DYNAMICS OF PROLIFERATION OF CELLS IN ORGANISM

Abduvaliev A. A.¹, Gildieva M. S.², Saidalieva. M.³, Hidirova. M.³

¹*Tashkent Medical Academy, Tashkent, Uzbekistan,*

²*National Cancer Research Center, Tashkent, Uzbekistan,*

³*Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies, Tashkent, Uzbekistan, regulatorika@yahoo.com*

Methods of qualitative and quantitative research on the basis of mathematical and computer modeling are becoming increasingly important, becoming one of the main methods of analyzing living systems, since new technologies and experimental techniques have led to a huge increase in the amount of information about living objects.

In this article we consider the principles of mathematical modeling of regulatorics of immune system. Currently, the regulatory role in the differentiation of immunocompetent cells is assigned to nuclear and cytoplasmic enzymes (taking into account the action of pre-micro-RNA and micro-RNA, respectively) serving competing metabolic pathways. The genes of the microRNAs are typically transcribed by RNA polymerase II. The precursors of micro-RNA - pre-microRNAs undergo nuclear RNA editing. Mature pre-microRNAs to micro-RNA in the cytoplasm under the action of the enzyme Dicer (RNAase III).

On the way of gene expression from DNA to protein they interfere with the translation procedure, affect the reading of information with i-RNA. Also, the polymorphism of pre-microRNA can be the reason for the onset of the tumor process. Aberrant expression of microRNA is detected both in the pre-tumor state and in cancers. Mutations in micro-RNA can be the cause of many immune diseases, so: they can lead to the activation of proto-oncogenes.

Here we have two levels of regulation:: nuclear and cytoplasmic. At the nuclear level synthesized pre-micro-RNA K_1 and K_2 act on the rate of synthesis of i-RNA repressor. The cytoplasmic level includes the synthesis of enzymes and the synthesis of enzyme activity products. Recent feedback affects the rate of synthesis of i-RNA. The mathematical model of cell differentiation, built on the basis of the above biological model, looks like this:

$$\frac{dC_1(t)}{dt} = \frac{a_1 + a_2P_1(t-h)}{1 + b_1K_1(t)b_2K_2(t)} - \frac{1}{T_{C_1}} \ln \left(\frac{2V(t_0 + T_{C_1})}{V(t_0)} \right) C_1(t);$$

$$\frac{dC_2(t)}{dt} = \frac{a_3 + a_4P_2(t-h)}{1 + b_3K_1(t)b_4K_2(t)} - \frac{1}{T_{C_2}} \ln \left(\frac{2V(t_0 + T_{C_2})}{V(t_0)} \right) C_2(t);$$

$$\frac{dK_1(t)}{dt} = a_5C_1(t) - \frac{1}{T_{K_1}} \ln \left(\frac{2V(t_0 + T_{K_1})}{V(t_0)} \right) K_1(t);$$

$$\frac{dK_2(t)}{dt} = a_6C_2(t) - \frac{1}{T_{K_2}} \ln \left(\frac{2V(t_0 + T_{K_2})}{V(t_0)} \right) K_2(t);$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \frac{a_7S_1E_1(t)}{1 + b_5E_1(t)} - \frac{1}{T_{P_1}} \ln \left(\frac{2V(t_0 + T_{P_1})}{V(t_0)} \right) P_1(t);$$

$$\frac{dC_2(t)}{dt} = \frac{a_6S_2E_2(t)}{1 + b_5E_2(t)} - \frac{1}{T_{P_2}} \ln \left(\frac{2V(t_0 + T_{P_2})}{V(t_0)} \right) P_2(t);$$

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = a_9C_1(t-h) - \frac{1}{T_{E_1}} \ln \left(\frac{2V(t_0 + T_{E_1})}{V(t_0)} \right) E_1(t);$$

$$\frac{dE_2(t)}{dt} = a_{10}C_2(t-h) - \frac{1}{T_{E_2}} \ln \left(\frac{2V(t_0 + T_{E_2})}{V(t_0)} \right) E_2(t).$$

Conclusion. The proposed biological and mathematical models can describe the course of the choice of an alternative pathway for the development of immune cells under the action of nuclear (pre-micro RNA) or cytoplasmic (micro-RNA) regulators important in triggering the mechanism of carcinogenesis and can be used in modeling the functioning of the immune system in a tumor process.

References

1. **Hidirov B. N.** *Selected works on mathematical modeling of living systems regulatorika*. Moscow: Izhevsk, 2014, 304 p. (In Russ.).
2. **Hidirov B. N., Saidalieva M., Hidirova M. B.** *Regulatorika of living systems*. Fan va texnologiyalar, 2014, 136 p. (In Russ.).

MATHEMATICS OF A HYBRID TYPE TOMOGRAPHY

Agranovsky M.

Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel, agranovsky.mark@gmail.com

Hybrid type tomography is a newly being developed direction in medical imaging, which is based on combination of different physical modalities.

Exploiting strong features of each counterpart leads to an effective reconstruction. Examples of such kind imaging techniques are thermo-acoustic and photo-acoustic tomography - relatively novel and successful medical diagnostics methods. The problem of the reconstruction of the image of the object from the collection of measurements delivers a variety of challenging and beautiful mathematical problems which will be the subject of the talk.

ON ALGEBRAICALLY INTEGRABLE DOMAINS

Agranovsky M.

Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel, agranovsky.mark@gmail.com

In connection with problems in celestial mechanics, Newton (Principia, 1788, Lemma 28) proved that (infinitely smooth) ovals in the plane are never algebraically integrable, meaning that the area cut off from an oval by a straight line never depends algebraically on the line. In 1988, Arnold suggested to find all infinitely smooth algebraically integrable domains in Euclidean spaces of arbitrary dimensions and conjectured that odd-dimensional ellipsoids are the only such domains. The talk will be devoted to recent progress in proving the Arnold's conjecture.

THE DISCRETE ANALOGUE OF THE DIFFERENTIAL OPERATOR

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2\omega^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \omega^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$$

Ahmadaliev G. N.¹, Hayotov A. R.²

¹*Tashkent Institute of Railway Engineers, Tashkent, Uzbekistan,*

²*Institute of Mathematics, Uzbek Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,*

hayotov@mail.ru

The optimization problem of approximate integration formulas in the modern sense appears as the problem of finding the minimum of the norm of a error functional ℓ given on some set of functions. In [3,4], The minimization problem of the norm of the error functional by coefficients was reduced to the system of difference equations of Wiener-Hopf type in the space $L_2^{(m)}$, where $L_2^{(m)}$ is the space of functions with square integrable m -th generalized derivative. Existence and uniqueness of the solution of this system was proved by S.L. Sobolev. In the works [3,4] the description of some analytic algorithm for finding the coefficients of optimal cubature formulas is given. For this S.L.Sobolev defined and investigated the discrete analogue $D_{hH}^{(m)}(h\beta)$ of the polyharmonic operator Δ^m . The problem of construction of the discrete operator $D_{hH}^{(m)}(h\beta)$ for n - dimensional case was very hard. In one dimensional case the discrete analogue $D_h^{(m)}(h\beta)$ of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ was constructed by Z.Zh. Zhamalov [5] and Kh.M. Shadimetov [2]. Последние результаты по построениям дискретных аналогов дифференциальных операторов приведены, например, в работе [1].

The main aim of the present paper is to find a discrete function $D_m(h\beta)$ that satisfies the following equation

$$D_m(h\beta) * G_m(h\beta) = \delta_d(h\beta), \quad (1)$$

where

$$G_m(h\beta) = \frac{\text{sign}(h\beta)}{4\omega^{2m-1}} [h\omega\beta \cdot \text{ch}(h\omega\beta) - (2m-3) \cdot \text{sh}(h\omega\beta) + 2 \sum_{k=1}^{m-2} \frac{(m-k-1)(h\omega\beta)^{2k-1}}{(2k-1)!}], \quad (2)$$

$m \geq 2$, $\omega > 0$, $\delta_d(h\beta)$ is equal to 1 when $\beta = 0$ and is equal to 0 when $\beta \neq 0$.

It should be noted that equation (1) is the discrete analogue for the following equation

$$\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2\omega^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \omega^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}} \right) G_m(x) = \delta(x), \quad (3)$$

where

$$G_m(x) = \frac{\text{sign}(x)}{4\omega^{2m-1}} [\omega x \cdot \text{ch}(\omega x) - (2m-3) \cdot \text{sh}(\omega x) + 2 \sum_{k=1}^{m-2} \frac{(m-k-1)(\omega x)^{2k-1}}{(2k-1)!}], \quad (4)$$

and δ is Dirac's delta function.

Theorem 1. *The discrete analogue for the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2\omega^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \omega^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ satisfying equation (1) has the form*

$$D_m(h\beta) = -\frac{2\omega^{2m-1}}{p_{2m-2}^{(2m-2)}} \begin{cases} \sum_{k=1}^{m-1} A_k \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2, \\ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} A_k, & |\beta| = 1, \\ C + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta = 0, \end{cases}$$

where $A_k = \frac{(1-\lambda_k)^{2m-4}(\lambda_k^2 - 2\lambda_k \text{ch}h\omega + 1)^2 p_{2m-2}^{(2m-2)}}{\lambda_k \mathcal{P}'_{2m-2}(\lambda_k)}$, $C = 4 - 4\text{ch}h\omega - 2m - \frac{p_{2m-3}^{(2m-2)}}{p_{2m-2}^{(2m-2)}}$,

$$p_{2m-2}^{(2m-2)} = (2m-3)\text{sh}h\omega - h\omega \text{ch}h\omega + 2 \sum_{k=1}^{m-2} \frac{(m-k-1)(h\omega)^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

$\mathcal{P}_{2m-2}(\lambda)$ is the known polynomial of degree $2m-2$, $p_{2m-2}^{(2m-2)}$, $p_{2m-3}^{(2m-2)}$ are the coefficients and λ_k are the roots of the polynomial $\mathcal{P}_{2m-2}(\lambda)$, $|\lambda_k| < 1$.

Theorem 2. *The discrete analogue $D_m(h\beta)$ of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 2\omega^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \omega^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ satisfies the following equalities*

- 1) $D_m(h\beta) * \text{sh}(h\omega\beta) = 0$,
- 2) $D_m(h\beta) * \text{ch}(h\omega\beta) = 0$,
- 3) $D_m(h\beta) * (h\omega\beta)\text{sh}(h\omega\beta) = 0$,
- 4) $D_m(h\beta) * (h\omega\beta)\text{ch}(h\omega\beta) = 0$,
- 5) $D_m(h\beta) * (h\beta)^\alpha = 0$, $\alpha = 0, 1, \dots, 2m-5$.

References

1. **Hayotov A. R.** *The discrete analogue of differential operator and its application.* Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 54, no. 3, July, 2014, 290-307.
2. **Shadimetov Kh. M.** *The discrete analogue of the differential operator d^{2m}/dx^{2m} and its construction.* Questions of Computations and Applied Mathematics. Tashkent, 1985, 22-35.
3. **Sobolev S. L.** *Introduction to the theory of cubature formulas.* Nauka, Moscow, 1974.
4. **Sobolev S. L., Vaskevich V. L.** *The Theory of Cubature Formulas.* Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
5. **Zhamalov Z. Zh.** *A difference analogue of the operator d^{2m}/dx^{2m} .* Direct and inverse problems for partial differential equations and their applications, "Fan Tashkent, 1978, 186, 97-108.

AN ISOMETRIC EXTENSION PROBLEM IN IDEALS OF COMPACT OPERATORS

Aminov B. R.¹, Chilin V. I.²

¹*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, aminovbehzod@gmail.com*

²*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, vladimirchil@gmail.com*

Let $(X, \|\cdot\|_X)$ and $(Y, \|\cdot\|_Y)$ be real normed spaces. A mapping $V : X \rightarrow Y$ is called an isometry if $\|V(x) - V(y)\|_Y = \|x - y\|_X$ for any $x, y \in X$. The relationship between the linear and metric structures of normed spaces has been widely discussed. In [7], Mazur and Ulam showed that any surjective isometry between two real normed spaces must be an invertible affine map. Therefore, two normed spaces are congruent if and only if the two spaces are (metrically) isometric; and the metric structure determines the linear structure. In [6], Mankiewicz proved that any surjective isometry between convex bodies (or open connected subsets) of two normed spaces can be extended to a surjective affine map between the two spaces. In particular, two normed spaces are congruent if and only if their unit balls are isometric. In [8], Tingley proposed the following problem: Let $(X, \|\cdot\|_X)$ and $(Y, \|\cdot\|_Y)$ be real normed spaces with the unit spheres $S(X)$ and $S(Y)$, respectively. Suppose $T : S(X) \rightarrow S(Y)$ is a surjective isometry. Is T necessarily the restriction to $S(X)$ of a linear, or affine, isometry $V : X \rightarrow Y$? It is rather difficult to answer this question in this general setting, even in the two-dimensional case. Tingley showed in [8] that isometries between the unit spheres of finite-dimensional Banach spaces necessarily map antipodal points to antipodal points. Affirmative results have been obtained for some classical Banach spaces; see, for example, [2,3]. Note also the paper [4], where Theorem 2.6 gives a positive solution of the Tingley problem for strictly convex real normed spaces.

It should be noted that in the case of complex normed spaces, the answer is negative. For example, if $X = Y = \mathbb{C}$ is the field of complex numbers and $T(z) = \bar{z}$, $z \in S(X)$, then $T : S(X) \rightarrow S(Y)$ is a surjective isometry, but there is not a \mathbb{C} -linear, or \mathbb{C} -affine, isometry $V : X \rightarrow Y$ such that $V(z) = T(z)$ for any $z \in S(X)$.

We investigate self-adjoint bijective isometries $T : S(\mathcal{C}_E) \rightarrow S(\mathcal{C}_F)$ in Banach symmetric ideals of compact operators acting in a complex separable infinite-dimensional Hilbert space \mathcal{H} . A positive solution of the Tingley problem in the case when E and F are strictly convex symmetric sequence spaces is given.

Let c_0 be a Banach lattice of all converging to zero sequences $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ of real numbers and let $x^* = \{\xi_n^*\}$ be the non-increasing rearrangement of x . A non-zero linear subspace $E \subset c_0$ with a Banach norm $\|\cdot\|_E$ is called *symmetric sequence space* if the conditions $y \in E$, $x \in c_0$, $x^* \leq y^*$, imply that $x \in E$ and $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.

Let \mathcal{H} be a complex separable infinite-dimensional Hilbert space, and let $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{K}(\mathcal{H})$)

be the $*$ -algebra of all bounded (respectively, compact) linear operators in \mathcal{H} . If $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ is a symmetric sequence space, then the set

$$\mathcal{C}_E := \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \{s_n(x)\}_{n=1}^\infty \in E\}$$

is a proper two-sided ideal in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, where $\{s_n(x)\}_{n=1}^\infty$ are the singular values of x (the eigenvalues of $(x^*x)^{1/2}$ in the decreasing order). In addition, $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is a Banach space with respect to the norm $\|x\|_{\mathcal{C}_E} = \|\{s_n(x)\}_{n=1}^\infty\|_E$ [5]. In this case we say that $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is a *Banach symmetric ideal*.

Important examples of Banach symmetric ideals are the Schatten ideals $\mathcal{C}_p := \mathcal{C}_{l_p}$, where

$$l_p = \left\{ x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in c_0, \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

It known that

$$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_E \subset \mathcal{K}(\mathcal{H}) \quad \text{and} \quad \|x\|_{\mathcal{C}_E} \leq \|x\|_{\mathcal{C}_1}, \quad \|y\|_\infty \leq \|y\|_{\mathcal{C}_E}$$

for all $x \in \mathcal{C}_1$, $y \in \mathcal{C}_E$.

Recall that a Banach space $(X, \|\cdot\|_X)$ is called *strictly convex* if for any $x, y \in X$ with $\|x\|_X = \|y\|_X = 1$ such that $\|x + y\|_X = 2$ we have $x = y$, that is, every element of the unit sphere of $(X, \|\cdot\|_X)$ is an extreme point of the unit ball. The Banach spaces l_p are examples of strictly convex Banach spaces for any $p \in (1, \infty)$ (see, for example, [1, Chapter 11, Problem 11.3]).

Theorem 1. *Let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a symmetric sequence space. The following conditions are equivalent:*

- (i) $(E, \|\cdot\|_E)$ is a strictly convex Banach space;
- (ii) $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is a strictly convex Banach space.

Since the Banach space l_p , $p \in (1, \infty)$, is a strictly convex Banach space, we have the following.

Corollary 1. *The Banach symmetric ideal $(\mathcal{C}_p, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_p})$ is a strictly convex Banach space for any $p \in (1, \infty)$.*

Let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a symmetric sequence space, and let $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ be the Banach symmetric ideal corresponding to $(E, \|\cdot\|_E)$. Let K be a $*$ -subset in \mathcal{C}_E , that is, $K = K^* = \{x^* : x \in K\}$ (for example, $\mathcal{C}_E^h = \{x \in \mathcal{C}_E : x = x^*\}$ and $S(\mathcal{C}_E)$ are $*$ -subsets in \mathcal{C}_E). A mapping $U : K \rightarrow K$ is said to be *self-adjoint* if $U(x^*) = (U(x))^*$ for all $x \in K$.

We say that Banach symmetric ideals $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ and $(\mathcal{C}_F, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_F})$ satisfy the *Tingley property* (witting $(\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_F) \in (TP)$) if for any surjective self-adjoint isometry $T : S(\mathcal{C}_E) \rightarrow S(\mathcal{C}_F)$ there is a linear, or an affine, isometry $V : \mathcal{C}_E \rightarrow \mathcal{C}_F$ such that $V(x) = T(x)$ for any $x \in S(\mathcal{C}_E)$.

The following theorem gives a solution of the Tingley problem for Banach symmetric ideals $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ and $(\mathcal{C}_F, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_F})$ in the case when E and F are strictly convex symmetric sequence spaces and $T : S(\mathcal{C}_E) \rightarrow S(\mathcal{C}_F)$ is a surjective self-adjoint isometry.

Theorem 2. *If $(E, \|\cdot\|_E)$ and $(F, \|\cdot\|_F)$ are strictly convex symmetric sequence spaces, then $(\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_F) \in (TP)$.*

Theorem 2 and Corollary 1 yield the following.

Corollary 2. *$(\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_q) \in (TP)$ for any $p, q \in (1, \infty)$.*

In conclusion, we note that Theorem 2 does not hold without the assumption of self-adjointness of the isometry $T : S(\mathcal{C}_E) \rightarrow S(\mathcal{C}_F)$. Indeed, if $E = F$, $T(x) = x^*$, $x \in S(\mathcal{C}_E)$, then $T : S(\mathcal{C}_E) \rightarrow S(\mathcal{C}_E)$ is a surjective not self-adjoint isometry, but there is not a \mathbb{C} -linear, or \mathbb{C} -affine, isometry $V : \mathcal{C}_E \rightarrow \mathcal{C}_E$ such that $V(y) = T(y)$ for any $y \in \mathcal{C}_E$.

References

1. **Albiac F., Kalton N. J.** *Topic in Banach space*. Springer, 2006.
2. **Ding G. G.** *The isometric extension problem in the unite spheres of $lp\Gamma$, ($p > 1$) type spaces*, Science in China, Ser. A, 2002, 32(11), 991-995.
3. **Ding G. G.** *The representation theorem of onto isometric mappings between two unit spheres of $l_1(\Gamma)$ type spaces and the application to isometric extension problem*, Acta Math. Sinica, English Series, 2004, 20(6), 1089-1094.
4. **Ding G. G., Li Jian-Ze.** *Isometries between unit spheres of the l^∞ -sum of strictly convex normed spaces*, Bull. Aust. Math. Soc. 2013, 88, 369-375.
5. **Kalton N. J., Sukochev F. A.** *Symmetric norms and spaces of operators*, J. Reine Angew. Math., 621 (2008), 81-121.
6. **Mankiewicz P.** *On extension of isometries in normed linear spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronomy, Phys., 1972, 20, 367-371.
7. **Mazur S., Ulam S.** *Sur less transformations isometriques d'espaces vectoriels norm'es*, Competes Rendus Acad Sci. Paris, 1932, 194, 946-948.
8. **Tingley D.** *Isometries of the unit sphere*, Geometriae Dedita, 1987, 22, 371-378.

CRITICAL EXPONENTS IN NONLINEAR DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS AND SYSTEMS

Aripov M.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, mirsaidaripov@mail.ru

In this talk, various extensions of an result of Fujita [1] for the initial value problem to the reaction-diffusion equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla(u^m |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + u^q$$

in $Q = (t > 0, x \in R^N)$ with $q > 1$ and such type nonlinear degenerate parabolic system is considered.

Considered problem are a base for modeling of the many physical processes [1-6]. For example, this system describes the processes of reaction - diffusion, heat conductivity, polytrophic filtration of gas and liquid in one and two componential nonlinear medium with source.

First Fujita showed that if $m = 0$, $p = 2$, $1 < q < 1 + 2/N$, then the initial value problem had no nontrivial global solutions while if $q > 1 + 2/N$, there were nontrivial global solutions. Samarskii A.A. and etc. [1] showed that condition of the global solvability when $p = 2$ is $q > m + 1 + 2/N$ after V. Galaktionov establish the following condition of the global solvability $q > p - 1 + p/N$ [3] when $m = 0$ (p -Laplacian equation). This paper discusses similar results and secondary critical exponents for double nonlinear degenerate equations and systems. The algorithm establishing both critical exponents using self-similar analysis of solutions is suggested. Based on an invariant group (self-similar) analysis the method of establishing of a value of the Fujita type critical exponents for single degenerate type parabolic equation is given. The Fujita type condition of a global solvability to the problem Cauchy for a nonlinear system with source and variable density are obtained. It is shown that a value of the second critical exponent for degenerate type double nonlinear parabolic system is the roots of the linear algebraic system equations. The estimates of solutions, asymptotic of the compactly supported, quenching solutions of self-similar system are established. Blow up analysis of the self-similar solutions is made. Depending on value of numerical parameters, the problem of an appropriate initial approximation solution for an iterative process, leading to the fast convergence with necessary accuracy is solved.

The results of numerical computations are discussed.

References

1. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurduomov S. P., Mikhajlov A. P. *Blow-up*

in quasilinear parabolic equations. Walter de Gruyter, 1995, 435 pp.

2. **Howard A. Levine** *The Role of Critical Exponents in Blowup Theorems*. SIAM Rev., 2006, 32(2), 262-288. <https://doi.org/10.1137/1032046>
3. **Galaktionov V. A., Vazquez J. L.** *The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations*. Discrete and continuous dynamical systems, vol. 8, e2, April 2002, 399-433.
4. **Ding J., Hongjuan Hu.** *Blow-up solutions for nonlinear reaction diffusion equations under Neumann boundary conditions*. Applicable Analysis 2017, 96:4, 549-562.
5. **Aripov M., Sadullaeva Sh. A.** *Qualitative properties of solutions of a doubly nonlinear reaction-diffusion system with a source*. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2015, 3, 1090-1099.
6. **Aripov M., Sadullaeva Sh. A.** *An asymptotic analysis of a self-similar solution for the double nonlinear reaction-diffusion system*. J. Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 2015, 6 (6), p. 793-802.

ASYMPTOTIC SOLUTION FOR NONLINEAR DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN THE SECOND CRITICAL EXPONENT CASE

Aripov M.¹, Mukimov A.²

¹National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, mirsaidaripov@mail.ru

²National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, mukimov_askar@mail.ru

In the domain $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$ the following Cauchy problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \left(|x|^n u^{m-1} |\nabla u|^k |^{p-2} \nabla u \right) + \varepsilon u^\beta \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in R^N \quad (2)$$

where $n, k, p, m, \beta, \varepsilon = \pm$ given numerical parameters, $\nabla(\cdot) = grad_x(\cdot)$ is studied. Equation (1-2) has been suggested as a mathematical model for a variety of physical problems (see [1-7]). For instance, it appears in the non-Newtonian fluids and is a nonlinear form of heat equation. One of the particular features of problem (1-2) is that the equation is degenerate at points where $u, \nabla u = 0$. Hence, there is no classical solution in general and we introduce the definition of weak solution in sense of distribution (see [3, 4]). In the work [2] a value of

secondary critical exponent $a = a_* = p/[\beta - (k(p-2) + m)]$ was established. The aim of this paper is to study the asymptotical behavior of the quenching solution of the self-similar solution to the problem (1), (2) in the secondary critical exponent case when an initial data has slow decay as $M|x|^{-a}$, $a > 0$, near $|x| \rightarrow \infty$.

We consider the following a self-similar solution

$$u(t, x) = \bar{u}(t)\omega(\tau(t), x), \omega(\tau(t), x) = f(\xi), \bar{u}(t) = (T + (\beta - 1)t)^{-\frac{1}{\beta-1}},$$

$$\xi = \frac{\varphi(x)}{\tau^{1/p}}, \varphi(x) = \frac{p}{p-n}|x|^{\frac{p-n}{p}}, p > n, \tau(t) = \frac{[T \pm (1-\beta)t]^{\frac{m+k(p-2)-\beta}{1-\beta}}}{m+k(p-2)-\beta}$$

Where function $f(\xi)$ satisfy to the self-similar equation

$$\xi^{1-s} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{s-1} f^{m-1} \left| \frac{df^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{\xi df}{p d\xi} + \frac{(f + \varepsilon f^\beta)}{\beta - b} = 0, S = pN/(p-n), b = m+k(p-2). \quad (3)$$

Theorem 1. *Let in (1) $\varepsilon = 1\beta > \max(k(p-2) + m)$, $[(k(p-2) + m)S]/(S-p)$, $p < S$ Then the regular solutions of the equation (3) vanishes at infinity has an asymptotic representation*

$$f(\xi) = c(m, p, k, S, \beta)(a + \xi^\gamma)^{\gamma_1}(1 + o(1)), \gamma = \frac{p}{p-1}, \gamma_1 = -\frac{p-1}{\beta - (k(p-2) + m)}$$

where

$$c(m, p, k, S, \beta) = \left(|k\gamma_1|^{p-2}(p-1) \frac{(S-p)\beta - (k(p-2) + m)S}{\beta - (k(p-2) + m)} \right)$$

Theorem 2. *Let in (1), $\varepsilon = -1$, $(k(p-2) + m) < \beta < [(k(p-2) + m)S]/(S-p)$, $p < S$ Then quenching solution of the equation (3) as $\xi \rightarrow \infty$ have asymptotical presentation*

$$f(\xi) = c(a + \xi^{\frac{p}{p-1}})^{-\frac{p-1}{\beta - (k(p-2) + m)}}(1 + o(1)), \gamma = \frac{p}{p-1}, \gamma_1 = -\frac{p-1}{\beta - (k(p-2) + m)} \quad (4)$$

where

$$c = \left(-|k\gamma_1|^{p-2}(p-1) \frac{(S-p)\beta - (k(p-2) + m)S}{\beta - (k(p-2) + m)} \right)^{\frac{1}{\beta - (k(p-2) + m)}}.$$

We notice that in particular value of the numerical parameters when $p = 2$, $k = 1$, $n = 1$ $m < \beta < m/(N-2)$, $2 < N$ asymptotic formula (4) was obtained in [3] we have condition without value of constant c. In particular in the second critical exponent case $a = a_*$ Theorem 2 solved open problem from [7].

References

1. **Kalashnikov S.** *Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate parabolic equations of second order.* Russian Mathematical Surveys, 1987, vol. 42, pp. 169-222.

2. **Pan Zheng, Chunlai Mu, Dengming Liu, Xianzhong Yao, Shouming Zhou** *The Blow-Up Analysis for a Quasilinear Degenerate Parabolic Equation with Strongly Nonlinear Source*. Abstract and Applied Analysis, 2012, Volume, Article ID 109546, 19 pages doi:10.1155/2012/109546.
3. **Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyomov S. P., Mikhailov A. P.** *Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate parabolic equations of second order*. Blow-up in quasilinear parabolic equations, Berlin, 4, Walter de Grueter, 535 p (1995).
4. **Cianci P., Martynenko A. V., Tedeev A. F.** *The blow-up phenomenon for degenerate parabolic equations with variable coefficients and nonlinear source*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications A, vol. 73, no. 7, pp. 2310-2323, 2010.
5. **Martynenko A. V., Tedeev A. F.** *On the behavior of solutions to the Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density and a source*. Comput. Math. Math. Phys. 48, 7, pp. 1145-1160 (2008).
6. **Du W., Li Zh.** *Critical exponents for heat conduction equation with a nonlinear boundary condition*. Int. Jour. of Math. Anal. vol. 7, 11, pp. 517-524 (2013).
7. **Aripov M., Sadullaeva Sh. A.** *To properties of solutions to reaction-diffusion equation with double nonlinearity and distributed parameters*. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2013, 6:2, pp. 157-167.

SOLUTION THE SECOND ORDER DEGENERATE TYPE NONLINEAR PARABOLIC EQUATION USING THE HAMILTON-JACOBY EQUATION

Aripov M.¹, Rakhmonova M. Y.²

¹National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, mirsaidaripov@mail.ru

²National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, mohidil2607@mail.ru

In this paper, in the domain $Q_T = (t, x) : 0 < t < T, x \in R_+$ we study the qualitative properties of solutions on the basis of a self-similar analysis to the following problem for the heat equation with double nonlinearity.

$$L(u) = -\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \left(u^{m-1} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u \right) = 0 \quad (1)$$

where $k \geq 0, m, p \in R$ are numerical parameters characterizing the property of a nonlinear medium in radial symmetric presentation $u(t, x) = u(t, r), r = |x| = (\sum_1^N x_i^2)^{1/2}$ have the form

$$L(u) = -\frac{\partial u}{\partial t} + r^{1-N} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} u^{m-1} \left| \frac{\partial u^k}{\partial r} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, u|_{r=0} = (T-t)^{-\alpha}, 0 < t < T, \alpha > 0, u|_{r=l(t)} = 0 \quad (2)$$

The first boundary condition is called the blow-up regime. In the series work [1-2] showed possibility to study properties of the solutions to the problem (1) when $k = 1, p = 2, N = 1$. Instead of the problem (1), (2) we consider the following problem to the Hamilton-Jacoby equation (the first order double nonlinear equation).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^{m-2} \left| \frac{\partial u^k}{\partial r} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2,$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, u|_{r=0} = (T \pm t)^{-\alpha}, 0 < t < T, \alpha > 0, u|_{r=l(t)} = 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, u|_{r=0} = (T \pm t)^{-\alpha}, 0 < t, \alpha > 0, u|_{r=l(t)} = 0 \quad (3)$$

$$\tau(t) = \pm \frac{(T \pm t)^{1-\alpha(m-1+k(p-2))}}{1-\alpha(m-1+k(p-2))} + c, 1-\alpha(m-1+k(p-2)) > 0$$

$$\tau(t) = \pm \ln(T \pm t) \text{ if } \alpha(m-1+k(p-2)) = 1 \quad \tau(t) = (T+t), \text{ if } \alpha(m-1+k(p-2)) = 0$$

$$u(t, r) = (T \pm t)^{-\alpha} f(\xi), \xi = r[\tau(t)]^{-1/p}$$

Then the function $f(\xi)$ satisfy to the self-similar equation

$$\xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{N-1} f^{m-1} \left| \frac{df^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{p} \frac{df}{d\xi} \pm \frac{\alpha}{1-\alpha(m-1+k(p-2))} f = 0$$

The self-similar solution Hamilton Jacoby Equation have

$$u(t, r) = (T \pm t)^{-\alpha} f_1(\xi), \xi = r[\tau(t)]^{-1/p}$$

$$f_1^{m-2} \left| \frac{df_1^k}{d\xi} \right|^{p-2} \left(\frac{df_1}{d\xi} \right)^2 + \frac{\xi}{p} \frac{df_1}{d\xi} \pm \frac{\alpha}{1-\alpha(m-1+k(p-2))} f_1 = 0 \quad (4)$$

Using comparison theorem the estimate of solution, the space localization of combustion processes, behavior of free boundary, asymptotic the self-similar solutions established [1]. The following problems have been solved. Suggested "good" approximation to each type of solution; construct an iterative method, which always converges to the desired solution (corresponding to the initial approximation) converges quickly, provides sufficient accuracy; to automatist

the process of calculations so that to quickly find all of the different solutions for the given parameters of the problem. At the numerical solution of a problem the equation was approximated on a grid under the in a combination to the method of balance. Iterative processes were constructed based on the method Picard and Newton. Results of computational experiments shows, that all both iterative methods are effective for the solution of considered nonlinear problems and leads to the nonlinear effects if we will use as initial approximation the solutions of Hamilton Jacoby with combination the method of standard equation [3].

References

1. **Галактионов В. А., Самарский А. А.** *Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. I-IV.* Method of construction an approximately self-similar solution, Матем. сб., 1983, 121(163):2(6), 131-155.
2. **Pan Zheng, Chunlai Mu, Dengming Liu Xianzhong Yao, Shouming Zhou** *Blow-Up Analysis for a Quasilinear Degenerate Parabolic Equation with Strongly Nonlinear.* Source Abstract and Applied analysis Volume, 2012, 19 p.
3. **Aripov M.** *Method of standard equations to solving of nonlinear boundary value problems.* Tashkent FAN(Monography), 1988, 137.

THE GEOMETRY OF HALF-EUCLIDIAN SPACE AS SUBSPACE OF PSEUDO-EUCLIDIAN SPACE AND IN SENCE OF FOLIATIONS

Artikbayev A.

Tashkent Institute of Railway Engineers, Tashkent, Uzbekistan

Usually the half-euclidian space R_n^m is defined as affine space with scalar product given as following for vectors with coordinates $X\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ and $Y\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$:

$$(X, Y)_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_my_m, \quad (1)$$

when $(X, Y)_1 = 0$ we put

$$(X, Y)_2 = x_{m+1}y_{m+1} + x_{m+2}y_{m+2} + \dots + x_ny_n. \quad (1')$$

Proposition 1. *The half-euclidian space R_n^m is the subspace of the pseudo-euclidian space ${}^l R_{m+2l}$ with non-positive scalar product, given as*

$$(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 + y_2 + \dots + x_m y_m + x_{m+1} y_{m+1} + \dots \\ \dots + x_{m+l} y_{m+l} - x_{m+l+1} y_{m+l+1} - \dots - x_{m+2l} y_{m+2l} \quad (2)$$

For the proof of the **Proposition 1** we consider the subspace $M \in {}^l R_{m+2l}$, consisting of the points with coordinates

$$\{x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+l}, x_{m+1}, \dots, x_{m+l}\}$$

as satisfying the condition $x_{m+l+i} = x_{m+i}, i = 1, \dots, l$. Calculating the scalar product of the vectors from the space $M \in {}^l R_{m+2l}$ via (2) we have, naturally, the form (1). If the scalar product is equal to zero then $x_i = const$, (3) where $i = 1, \dots, m$. In this case in subspace M define the basis vectors as following:

$$\tilde{e}_{m+i} = \frac{1}{2}(\bar{e}_{m+i} + \bar{e}_{m+i+l})$$

In this basis the form (1') becomes the usual euclidian scalar product.

Proposition 2. *The half-euclidian space R_n^m is the trivial m -dimensional foliation of the manifold $M_n = R_n$.*

The scalar product (1) becomes zero for condition (3). So we have the foliation given with $x_i = const, i = 1, \dots, m$ [2].

References

1. **Michael McQuillan.** *Canonical Models of Foliations.* Pure and Applied Mathematics Quarterly, Volume 4, Number 3, (Special Issue: In honor of Fedor Bogomolov, Part 2 of 2), 2008, 877-1012.
2. **Itiro Tamura.** *Topology of Foliations.* An Introduction, in Japanese by Iwanami shoten Publishers, Tokyo, 1976.
3. **William P. Thurston** *Three-manifolds. Foliations and circles, I.* arXiv:math/9712268.

APPLICATION OF METHODOLOGY OF BASIC PROBLEM AT LEARNING OF MATHEMATICS AND SOFTWARE DISCIPLINES

Ashurova D.¹, Raimova M.², Yuldasheva M.³

¹*Navoi State Pedagogical Institute, Navoi, Uzbekistan, dilfuz_2007@mail.ru*

²*Navoi State Pedagogical Institute, Navoi, Uzbekistan marfuganav@mail.ru*

³*Specialized School No.25, Tashkent, Uzbekistan, myuldash@mail.ru*

In system of pre-university education the methodology of learning and upbringing is paid a special attention. However at the higher education school, except for the specific examples related with the works of outstanding teachers and scientists, quite often it is natural to apply the approach in assessment of suitability of a teacher on the basis of, as a rule, unilateral criterion: he/she is a recognized scientist and expert in the field, "a good companion and students much as they would like will understand him/her. Thereby the axiom comes into force: "application of a specific methodology and pedagogical technologies for teachers of the higher educational establishments is a voluntary business ". Obviously, such approach not only forms the point of view about minor importance of a technique in system of the higher education and thereby blocks the road to pedagogical initiatives, special methodology, specific ways of stirring up of trainees [1,2]. Let's give an example of one approach called by us "methodology of basic supporting problems" which from our point of view can be new confirmation of importance and significance of conceptual approach, as in the general, and private pedagogics.

Principles of methodology of basic problems: 1. Training in constant development of new knowledge and skills, on the basis of a paradigm "Education through all life". 2. Selection for each new subject a basic problem allowing to establish internal and external stable subject relations. 3. Maximum individualization of performed tasks. 4. Selection of several basic problems uniting theoretical prerequisites and ways (algorithms) of the solution of integrated problems. 5. Constant control over the solution of the problems reflecting both complication of a basic problem and evolution of methods of this subject. In general this methodology can be considered also as a private technique. For example, application of this methodology in linguistics, specifically, at studying basics of some living language, the methodology of basic problems can be expressed by the following chain of problems: to think out a predicate → to think out a subject → to think out two or three adjectives → to think out a verbal adverb phrase → to make a complex sentence. At the training in programming a permanent transition from binary operation to data and methods of some class can be created as an element of object focused program. At the same time each pupil thinks out own versions, they are discussed, pupils who find it difficult get help. The authors of this work regularly use in practice the specified methodology which often yields highly positive results. Methodical recommendations about application of this methodology for a number of processes in learning

mathematic, humanitarian and software disciplines including at teaching disabled children having problems with understanding of standard material [3] are provided in the corresponding didactic developments.

Conclusion. 1. The solution of problem of concept choice at training in many respects defines success of the training process. Success also depends on a rational combination of both private and general methodologies. 2. The methodology of basic problem approved in some cases is provided. 3. If the known or new paradigms define strategy in education, then private techniques define tactics of training. 4. The methodology of basic problems is the way of permanent concentration of attention and activation of trainees.

References

1. **Yuldashev Z. Kh., Ashurova D. N.** *Innovative - Didactic Program Complex and New Formalized Model of Education*. Malaysian Journal of Mathematical Sciences, 2012, 6, 97-103.
2. **Ashurova D. N.** Problems of training IT specialists in Uzbekistan.
3. **Ashurova D. N., Yuldashev Z. Kh.** *Informatization of Education and Science*, 2012, №2.
4. **Yuldashev Z. Kh., Yuldasheva M. A.** *Mathematics and information technologies for rehabilitation of disabled people*. Book of Abstracts IV Congress of The Turkic World Mathematical Society, Baku, 2011, - p. 506.

POLYNOMIALS ON PARABOLIC MANIFOLDS DEFINED AS A COMPLEMENT OF ALGEBRAIC SETS

Atamuratov A.¹, Kamolov Kh.²

¹*Urgench State University, Urgench, Uzbekistan, alimardon01@mail.ru*

²*Urgench State University, Urgench, Uzbekistan, xkamolov@mail.ru*

Notion of “parabolicity” were introduced by P. Griffiths and J.King [1] in their joint work dedicated to the Nevanlinna’s value distribution theory in higher dimensions. Their research concentrated on affine algebraic sub varieties of complex spaces and affine-algebraic character provided existence special exhaustion function which after called parabolic exhaustion. Explaining in more details if $A \subset \mathbb{C}^n$ is affine-algebraic sub variety of pure dimension m , then

there exist special exhaustion function $\rho : A \rightarrow [-\infty, +\infty)$ which satisfies 1) $\{\rho(z) < c\} \subset\subset A$ (exhaustive); 2) $dd^c\rho \geq 0$ (plurisubharmonicity) 3) $(dd^c\rho)^m = 0$ (maximality)

In further researches (see for example V.Stoll [2]) these properties had been taken for the definition of parabolicity of complex analytic spaces and Stein manifolds. Parabolic Stein manifolds well studied in works of authors A.Zariahi [3], A.Sadullaev and A.Aytuna [4,5], where besides of general properties there are considered different examples of parabolic manifolds.

One of the important questions of recent research statements is establishing parabolicity of analytic subvarieties and their complements. As it was shown in [1] by Griffiths and King each algebraic sub variety is parabolic manifold. Parabolicity of complements of algebraic sets established in [4]. In this work we investigate regularity of complements of algebraic sets. Principally our research is concentrated on constructions of polynomials on such manifolds.

Let X be a Parabolic Stein manifold and ρ is special exhaustion function.

Definition 1 [3]. If for a function $f(z) \in \mathcal{O}(X)$ there exist positive numbers c_f and d such that for each $z \in X$ it holds inequality

$$|f(z)| \leq c_f(1 + e^{\rho(z)})^d, \quad (1)$$

then the function $f(z)$ is called ρ -polynomial on X . If $f(z)$ is a ρ -polynomial on X , then integer part of a minimal value of d in (1) is called degree of the polynomial.

Definition 2 [5]. S -parabolic manifold X is called regular in case if the space of all ρ -polynomials $\mathcal{P}_\rho(X)$ is dense in $\mathcal{O}(X)$.

Let there given an algebraic set

$$A = \{z \in \mathbb{C}^n : P(z) = 0\},$$

where $P(z)$ is polynomial of degree m on complex space \mathbb{C}^n . We consider manifold $X = \mathbb{C}^n \setminus A$. Then as a special exhaustion we take the function

$$\rho(z) = \frac{1}{2} \ln \left[\left| z_1 + \frac{1}{P(z)} \right|^2 + \dots + \left| z_n + \frac{1}{P(z)} \right|^2 \right]$$

The main result of the work are the next

Theorem 1. *A function $f \in \mathcal{O}(X)$ is ρ -polynomial of degree d if and only if it admits expansion*

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^d A_k \cdot \left(z_1 + \frac{1}{P(z)} \right)^{k_1} \cdot \dots \cdot \left(z_n + \frac{1}{P(z)} \right)^{k_n}$$

with constant coefficients $A_k \in \mathbb{C}$.

Theorem 2. *If $f(z) \in \mathcal{O}(X)$, then on the arbitrary compact set $E \subset X$ function $f(z)$ can be approximated by ρ -polynomials, i.e. parabolic manifolds X is regular.*

References

1. **Griffiths P., King J.** *Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties.* Acta mathematica, 1973, Vol. 130, pp.145-220.
2. **Stoll W.** *Value distribution on parabolic spaces. Lecture notes.* Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1977, p. 216.
3. **Zeriahi A.** *Function de Green pluricomplex a pole a l'infini sur un espace de Stein parabolique.* Math. Scand., 69, (1991), pp.89-126.
4. **Aytuna A., Sadullaev A.** *Parabolic Stein Manifolds.* Mathematica Scandinavica Vol 114, No 1 (2014) , pp. 86-109.
5. **Aytuna A., Sadullaev A.** *Polynomials on Parabolic Manifolds.* Contemporary mathematics 2016, No 662, pp. 1-22 (arXiv:1504.08092v1 [math.CV] 30 Apr 2015).

2-LOCAL DERIVATIONS ON LIE ALGEBRAS OF SKEW-ADJOINT INFINITE DIMENSIONAL OPERATORS

Ayupov Sh.¹, Arzikulov F.²

¹*Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,*
sh_ayupov@mail.ru

²*Andijan State University, Andijan, Uzbekistan, arzikulovfn@rambler.ru*

The present paper is devoted to 2-local Lie derivations. In 1997, P. Šemrl [7] introduced the notion of 2-local derivations and described 2-local derivations on the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on the infinite-dimensional separable Hilbert space H . After a number of paper were devoted to 2-local maps on different types of rings, algebras, Banach algebras and Banach spaces.

In the present paper 2-local derivations on the Lie ring of skew-adjoint matrices over commutative ring are described. First 2-local Lie derivations are studied by L. Chen, F. Lu and T. Wang in [3]. Later in [2] Sh. Ayupov, K. Kudaybergenov and I. Rakhimov give total description of 2-local Lie derivations for the case of finite dimensional Lie algebras. They prove that every 2-local derivation on a finite-dimensional semi-simple Lie algebra \mathcal{L} over an

algebraically closed field of characteristic zero is a derivation. They also show that a finite-dimensional nilpotent Lie algebra \mathcal{L} with $\dim \mathcal{L} \geq 2$ admits a 2-local derivation which is not a derivation.

At the same time, in [5] X. Lai and Z.X. Chen give description of 2-local Lie derivations for the case of finite dimensional simple Lie algebras. Recently, L. Liu [6] characterizes 2-local Lie derivations on a semi-finite factor von Neumann algebra with dimension greater than 4. Finally, in [4] on the algebras including factor von Neumann algebras, UHF algebras and the Jiang-Su algebra, the authors prove that every 2-local Lie derivation is a Lie derivation.

In the present paper we develop an algebraic approach to investigation of inner derivations and 2-local inner derivations on Lie algebras.

Let M be a Lie algebra with Lie multiplication $[x, y]$.

Recall that a linear map $D : M \rightarrow M$ is called a derivation, if $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$ for every two elements $x, y \in M$.

A map $\Delta : M \rightarrow M$ is called a 2-local derivation, if for every two elements $x, y \in M$ there exists a derivation $D_{x,y} : M \rightarrow M$ such that $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$, $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$.

A derivation D on a Lie algebra M is called an inner derivation, if there exists an element $a \in M$ such that

$$D(x) = [a, x] - [x, a], x \in M.$$

A map $\Delta : M \rightarrow M$ is called a 2-local inner derivation, if for every two elements $x, y \in M$ there exists an element $a \in M$ such that $\Delta(x) = [a, x] - [x, a]$, $\Delta(y) = [a, y] - [y, a]$.

Let throughout the paper n be an arbitrary infinite cardinal number, Ξ be a set of indices of the cardinality n . Let $\{e_{ij}\}$ be a set of matrix units such that e_{ij} is a $n \times n$ -dimensional matrix, i.e. $e_{ij} = (a^{\alpha\beta})_{\alpha\beta \in \Xi}$, the (i, j) -th component of which is 1, i.e. $a_{ij} = 1$, and the rest components are zeros.

Let $\{m_\xi\}$ be a set of $n \times n$ -dimensional matrixes and $m_\xi = (m_\xi^{\alpha\beta})_{\alpha\beta \in \Xi}$ for every ξ . Then by $\sum_\xi m_\xi$ we denote the matrix whose components are sums of the corresponding components of matrixes of the set $\{m_\xi\}$, i.e.

$$\sum_\xi m_\xi = \left(\sum_\xi m_\xi^{\alpha\beta} \right)_{\alpha\beta \in \Xi}.$$

Here, the maximal quantity of nonzero summands of the sum $\sum_\xi m_\xi^{\alpha\beta}$ is countable.

Let throughout the paper

$$M_n(F) = \left\{ \sum_{i,j \in \Xi} \lambda^{ij} e_{ij} : \text{for all indices } i, j, \lambda^{ij} \in \mathbf{R}, \right.$$

and there exists such number $K \in \mathbf{R}$, that for all $n \in N$

$$\text{and } \{e_{kl}\}_{kl=1}^n \subseteq \{e_{ij}\} \left\| \sum_{kl=1}^n \lambda^{kl} e_{kl} \right\| \leq K\},$$

where $\left\| \sum_{kl=1}^n \lambda^{kl} e_{kl} \right\|$ the norm of the matrix $\sum_{kl=1}^n \lambda^{kl} e_{kl}$ in the finite dimensional C^* -algebra, generated by $\{e_{kl}\}_{kl=1}^n$. It is easy to see that $M_n(\mathbf{R})$ is a vector space over \mathbf{R} .

In $M_n(\mathbf{R})$ we introduce an associative multiplication as follows: if

$$x = \sum_{i,j \in \Xi} \lambda^{ij} e_{ij}, y = \sum_{i,j \in \Xi} \mu^{ij} e_{ij}$$

are elements of $M_n(\mathbf{R})$ then

$$xy = \sum_{i,j \in \Xi} \left[\sum_{\xi \in \Xi} \lambda^{i\xi} \mu^{\xi j} e_{ij} \right].$$

With respect to this operation $M_n(\mathbf{R})$ becomes an associative algebra and $M_n(\mathbf{R}) \cong B(l_2(\Xi))$, where $l_2(\Xi)$ is a Hilbert space over F with elements $\{x_i\}_{i \in \Xi}$, $x_i \in F$ for all $i \in \Xi$, $B(l_2(\Xi))$ is the associative algebra of all bounded linear operators on the Hilbert space $l_2(\Xi)$. Then $M_n(\mathbf{R})$ is a real von Neumann algebra of infinite $n \times n$ -dimensional matrices over \mathbf{R} [1].

Let $K_n(\mathbf{R})$ be the vector space of all skew-adjoint matrices in $M_n(\mathbf{R})$, i.e.

$$K_n(\mathbf{R}) = \{a \in M_n(\mathbf{R}) : a^* = -a\}.$$

Then with respect to Lie multiplication

$$[a, b] = ab - ba, a, b \in K_n(\mathbf{R})$$

$K_n(\mathbf{R})$ is a Lie algebra.

Let Ω be an arbitrary set, $M(\Omega, K_n(\mathbf{R}))$ be the Lie algebra of all mappings of Ω to $K_n(\mathbf{R})$. Put

$$e_{ij} = \sum_{\xi, \eta \in \Xi} \lambda^{\xi\eta} e_{\xi\eta},$$

where for all ξ, η , if $\xi = i, \eta = j$ then $\lambda^{\xi\eta} = \mathbf{1}$, else $\lambda^{\xi\eta} = 0$, $\mathbf{1}$ is unit of the algebra $F(\Omega)$ of all real number-valued functions on Ω . Let $s_{i,j} = e_{i,j} - e_{j,i}$ for all distinct $i, j \in \Xi$.

Lemma 1. *Let Ω be an arbitrary set, $M(\Omega, K_n(\mathbf{R}))$ be the Lie algebra of all mappings of Ω to $K_n(\mathbf{R})$. Let \mathcal{L} be a Lie subalgebra of $M(\Omega, K_n(\mathbf{R}))$ containing the family $\{s_{i,j}\}_{i,j \in \Xi}$ and Δ be a 2-local inner derivation on \mathcal{L} and D_a^L, D_b^L be inner derivations on \mathcal{L} , generated by $a, b \in \mathcal{L}$ such that*

$$\Delta(s_{i,j}) = D_a^L(s_{i,j}) = D_b^L(s_{i,j})$$

for an arbitrary pair of different indices i, j . Then

$$a^{ki} = b^{ki}, a^{kj} = b^{kj}, a^{ik} = b^{ik}, a^{jk} = b^{jk}.$$

for all k distinct from i and j .

Lemma 2. Let Ω be an arbitrary set, $M(\Omega, K_n(\mathbf{R}))$ be the Lie algebra of all mappings of Ω to $K_n(\mathbf{R})$. Let \mathcal{L} be a Lie subalgebra of $M(\Omega, K_n(\mathbf{R}))$ containing the family $\{s_{i,j}\}_{i,j \in \Xi}$ and Δ be a 2-local inner derivation on \mathcal{L} . Then there exist $a \in \mathcal{L}$ such that

$$\Delta(s_{i,j}) = D_a^L(s_{i,j})$$

for every pair of different indices i, j .

The following theorem is the key result of this paper.

Theorem 3. Let Ω be an arbitrary set, $M(\Omega, K_n(\mathbf{R}))$ be the Lie algebra of all mappings of Ω to $K_n(\mathbf{R})$. Let \mathcal{L} be a Lie subalgebra of $M(\Omega, K_n(\mathbf{R}))$ containing the family $\{s_{i,j}\}_{i,j \in \Xi}$. Then any 2-local inner derivation on the Lie algebra \mathcal{L} is an inner derivation.

In particular, theorem 3 contains the following theorem.

Theorem 4. Let Ω be an arbitrary set, $M(\Omega, K_n(\mathbf{R}))$ be the Lie algebra of all mappings of Ω to $K_n(\mathbf{R})$. Then any 2-local inner derivation on the Lie algebra $M(\Omega, K_n(\mathbf{R}))$ is an inner derivation.

Let $\mathcal{K}(l_2(\Xi))$ the C^* -algebra of all compact operators on the Hilbert space $l_2(\Xi)$ over \mathbf{R} , $\mathcal{K}_K(l_2(\Xi))$ be the Lie algebra of all skew-adjoint compact operators on the Hilbert space $l_2(\Xi)$. Let Q be a topological space such that $\text{supp}(Q) = \Omega$. Then the vector space $C(Q, \mathcal{K}_K(l_2(\Xi)))$ of all continuous mappings of Q to $\mathcal{K}_K(l_2(\Xi))$ is a Lie subalgebra of $M(\Omega, K_n(\mathbf{R}))$ containing the family $\{s_{i,j}\}_{i,j \in \Xi}$. Therefore by theorem 3 we have the following result.

Theorem 5. Every 2-local inner derivation on the Lie algebra $C(Q, \mathcal{K}_K(l_2(\Xi)))$ is an inner derivation.

References

1. **Arzikulov F. N.** *Infinite order decompositions of C^* -algebras*. SpringerPlus, Publisher, 2016, 5(1), 1-13.
2. **Ayupov Sh., Kudaybergenov K., Rakhimov I.** *2-local derivations on finite-dimensional Lie algebras*. Linear Algebra Appl., 2015, 474, 1-11.
3. **Chen L., Lu F., Wang T.** *Local and 2-local Lie derivations of operator algebras on Banach spaces*. Integr. Equ. Oper. Theory, 2013, 77, 109-121.
4. **He J., Li J., An G., Huang W.** *Characterizations of 2-local derivations and local Lie derivations on some algebras*. arXiv:1611.01632 [math.OA], 2016.

5. **Lai X., Chen Z. X.** *2-local derivations of finite-dimensional simple Lie algebras.* Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 2015, 58, 847-852. (Chinese).
6. **Liu L.** *2-local Lie derivations on semi-finite factor von Neumann algebras.* Linear Multilinear Algebra, 2016, 64, 1679-1686.
7. **Šemrl P.** *Local automorphisms and derivations on $B(H)$.* Proc. Amer. Math. Soc., 1997, 125, 2677-2680.

SEMISIMPLE LEIBNIZ ALGEBRAS AND THEIR DERIVATIONS AND AUTOMORPHISMS

Ayupov Sh.¹, Kudaybergenov K.², Omirov B.³, Zhao K.⁴

¹*Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,*
sh_ayupov@mail.ru

²*Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan, karim2006@mail.ru*

³*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, omirovb@mail.ru*

⁴*Hebei Normal University, Shijiazhuang, China, kzhaomath.ac.cn*

In recent years the non-associative analogues of classical constructions become of interest in connection with their applications in many branches of mathematics and physics. Leibniz algebras present a “non-commutative” analogue of Lie algebras and they were introduced by Loday [5] as algebras satisfying the (right) Leibniz identity:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y].$$

Leibniz algebras preserve an important property of Lie algebras: the operator of right multiplication is a derivation.

During the last decades the theory of Leibniz algebras has been actively investigated. Some (co)homology and deformation properties; results on various types of decompositions; structure of solvable and nilpotent Leibniz algebras; classifications of some classes of graded nilpotent Leibniz algebras were obtained in numerous papers devoted to Leibniz algebras, see, for example, [1-8] and reference therein. In fact, many results on Lie algebras have been extended to the Leibniz algebra case.

From the classical theory of finite-dimensional Lie algebras it is known that an arbitrary semisimple Lie algebra is decomposed into a direct sum of simple ideals, which are completely classified. In the paper [8] an example of semisimple Leibniz algebra, which can not be

decomposed into a direct sum of simple ideals, is presented. This shows that the structure of semisimple Leibniz algebras is much more complicated than structure of semisimple Lie algebras. Thus, the natural problem arises - to describe semisimple Leibniz algebras. In fact, the structure depends on relations between semisimple Lie algebras and their modules. Due to Barnes' result [4] an arbitrary semisimple Leibniz algebra \mathcal{L} is represented as $\mathcal{L} = \mathcal{S} \dot{+} \mathcal{I}$, where \mathcal{S} is a semisimple Lie algebra and \mathcal{I} is the ideal generated by squares of elements of the algebra \mathcal{L} . This means that the problem is focused to investigation of the relation between the ideal \mathcal{I} and the semisimple Lie algebra \mathcal{S} .

The aim of this note is the description of finite-dimensional semisimple Leibniz algebras over complex numbers, their derivations and automorphisms.

For a Leibniz algebra \mathcal{L} , a subspace generated by its squares $\mathcal{I} = \text{span} \{[x, x] : x \in \mathcal{L}\}$ due to Leibniz identity becomes an ideal, and the quotient $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/\mathcal{I}$ is a Lie algebra called liezation of \mathcal{L} . Moreover, $[\mathcal{L}, \mathcal{I}] = 0$. In general, $[\mathcal{I}, \mathcal{L}] \neq 0$. Since we are interested in Leibniz algebras which are not Lie algebras, we will always assume that $\mathcal{I} \neq 0$.

A Leibniz algebra \mathcal{L} is called simple if its liezation is a simple Lie algebra and the ideal \mathcal{I} is a simple ideal. Equivalently, \mathcal{L} is simple iff \mathcal{I} is the only non-trivial ideal of \mathcal{L} .

A Leibniz algebra \mathcal{L} is called *semisimple* if its liezation \mathcal{G} is a semisimple Lie algebra.

We say that a semisimple Leibniz algebra $\mathcal{L} = \mathcal{S} \dot{+} \mathcal{I}$ is *decomposable*, if $\mathcal{L} = (\mathcal{S}_1 \dot{+} \mathcal{I}_1) \oplus (\mathcal{S}_2 \dot{+} \mathcal{I}_2)$, where $\mathcal{S}_1 \dot{+} \mathcal{I}_1$ and $\mathcal{S}_2 \dot{+} \mathcal{I}_2$ are non-trivial semisimple Leibniz algebras. Otherwise, we say that \mathcal{L} is *indecomposable*.

Suppose \mathcal{L} is an indecomposable semisimple Leibniz algebra with a given Levi decomposition $\mathcal{L} = \mathcal{S} \dot{+} \mathcal{I}$. We may assume that $\mathcal{S} = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{S}_i$ and $\mathcal{I} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{I}_i$ where each \mathcal{S}_i is a simple Lie algebra and each \mathcal{I}_i is an irreducible \mathcal{S} -module. We say that \mathcal{S}_i and \mathcal{S}_j are adjacent if there exists \mathcal{I}_k such that $[\mathcal{I}_k, \mathcal{S}_i] = [\mathcal{I}_k, \mathcal{S}_j] = \mathcal{I}_k$. We say that \mathcal{S}_i and \mathcal{S}_j are connected if there exist $\mathcal{S}_{k_1} = \mathcal{S}_i, \mathcal{S}_{k_2}, \dots, \mathcal{S}_{k_r} = \mathcal{S}_j$ such that \mathcal{S}_{k_l} and $\mathcal{S}_{k_{l+1}}$ are adjacent.

Theorem 1. *Let $\mathcal{L} = \mathcal{S} \dot{+} \mathcal{I}$ be an indecomposable semisimple Leibniz algebra with $\mathcal{I} \neq \{0\}$. Then*

- (a). $\mathcal{S} = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{S}_i$ where each \mathcal{S}_i is a simple Lie algebra;
- (b). $\mathcal{I} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{I}_i$ where each \mathcal{I}_i is an irreducible \mathcal{S} -module with $[\mathcal{I}_i, \mathcal{S}] = \mathcal{I}_i$;
- (c). $\mathcal{L} = \mathcal{S} \times \mathcal{I}$;
- (d). for any $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq j \leq n$ there is an irreducible \mathcal{S}_i -module \mathcal{I}_{ij} such that $\mathcal{I}_i = \bigotimes_{j=1}^m \mathcal{I}_{ij}$;
- (e). any \mathcal{S}_i and \mathcal{S}_j are connected.

We will use $\text{Der}(\mathcal{L})$ to denote the Lie algebra of derivations of a Leibniz algebra \mathcal{L} . For

any $x \in \mathcal{S}$ we have the inner derivation

$$R_x : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, y \mapsto [y, x], \forall y \in \mathcal{L}.$$

Let $R_{\mathcal{S}} = \{R_x : x \in \mathcal{S}\}$ be the inner derivations of \mathcal{L} , and

$$\text{Der}(\mathcal{L})_{\mathcal{S}, \mathcal{I}} = \{d \in \text{Der}(\mathcal{L}) : d(\mathcal{S}) \subset \mathcal{I}, d(\mathcal{I}) = 0\},$$

$$\text{Der}(\mathcal{L})_{\mathcal{I}, \mathcal{I}} = \{d \in \text{Der}(\mathcal{L}) : d(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}, d(\mathcal{S}) = 0\}.$$

Theorem 2. *Let $\mathcal{L} = \mathcal{S} \dot{+} \mathcal{I}$ be a semisimple Leibniz algebra. Then*

$$\text{Der}(\mathcal{L}) = R_{\mathcal{S}} \dot{+} \text{Der}(\mathcal{L})_{\mathcal{S}, \mathcal{I}} \dot{+} \text{Der}(\mathcal{L})_{\mathcal{I}, \mathcal{I}}.$$

We define the following subgroups of $\text{Aut}(\mathcal{L})$:

$$\text{Aut}(\mathcal{L})_{\mathcal{I}} = \{\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{L}) : \varphi|_{\mathcal{S}} = \text{id}_{\mathcal{S}}\},$$

$$\text{Aut}(\mathcal{L})_{\mathcal{S}} = \{\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{L}) : \varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}\},$$

$$\text{Aut}(\mathcal{L})_0 = \{\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{L}) : \varphi|_{\mathcal{I}} = \text{id}_{\mathcal{I}}\}.$$

Note that $\text{Aut}(\mathcal{L})_{\mathcal{I}}$ and $\text{Aut}(\mathcal{L})_0$ are normal subgroups of $\text{Aut}(\mathcal{L})_{\mathcal{S}}$ and $\text{Aut}(\mathcal{L})$, respectively.

Theorem 3. *Let $\mathcal{L} = \mathcal{S} \dot{+} \mathcal{I}$ be a semisimple Leibniz algebra. Then*

$$\text{Aut}(\mathcal{L}) = \text{Aut}(\mathcal{L})_{\mathcal{S}} \times \text{Aut}(\mathcal{L})_0.$$

References

1. **Albeverio S., Ayupov Sh. A., Omirov B. A.** *On nilpotent and simple Leibniz algebras.* Comm. Algebra, 2005, 33, 159-172.
2. **Albeverio S., Ayupov Sh. A., Omirov B. A.** *Cartan subalgebras, weight spaces and criterion of solvability of finite dimensional Leibniz algebras.* Rev. Mat. Complut., 2006, vol. 19(1), 183-195.
3. **Balavoine D.** *Déformations et rigidité géométrique des algèbres de Leibniz.* Comm. Algebra, 1996, 24(3), 1017-1034.
4. **Barnes D. W.** *On Levi's theorem for Leibniz algebras.* B. Aust. Math. Soc., 2012, 86(2), 184-185.

5. **Loday J. L., Pirashvili T.** *Leibniz representations of Leibniz algebras.* J. Algebra, 1996, 181, 414-425.
6. **Omirov B. A.** *Conjugacy of Cartan subalgebras of complex finite dimensional Leibniz algebras.* Journal Algebra, vol. 2006, 302, 887-896.
7. **Rakhimov I. S., Masutova K. K., Omirov B. A.** *On derivations of semisimple Leibniz algebras.* B. Malays. Math. Sci. Soc., 2015, 1-12
8. **Rakhimov I. S., Omirov B. A., Turdibaev R. M.** *On description of Leibniz algebras corresponding to \mathfrak{sl}_2 ,* Algebr. Represent. Theory, 2013, 16, Issue 5, 1507-1519.

ALMOST UNIFORM CONVERGENCE IN THE INDIVIDUAL ERGODIC THEOREM

Azizov A. N.¹, Chilin V. I.²,

¹National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, azizov.07@mail.ru

²National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, vladimirchil@gmail.com

1. Introduction and preliminaries

Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a measurable space with σ -finite measure, let $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be the algebra of equivalence classes of almost everywhere finite real-valued measurable functions on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ and let $L_p = L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a classical Banach function space equipped with the norm $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Let $T : L_1 + L_\infty \rightarrow L_1 + L_\infty$ be a Dunford-Schwartz operator (writing $T \in DS$), i.e. T is a linear operator such that $\|T(f)\|_1 \leq \|f\|_1$ for all $f \in L_1$ and $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ for all $f \in L_\infty$.

According to the Dunford-Schwartz individual ergodic theorem [2, Chapter VIII, Theorem VIII.6.6] for any $T \in DS$ and $f \in L_p$ there exists a function $\hat{f} \in L_p$ such that the averages $A_n(T)(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(f)$ converge almost everywhere (a.e.) to \hat{f} .

By the Egorov's theorem, in the case $\mu(\Omega) < \infty$, a.e.-convergence coincides with an almost uniform convergence (a.u.). If $\mu(\Omega) = \infty$, then the a.u.-convergence is stronger than a.e.-convergence.

In this note we obtain a version of individual ergodic theorem for a.u.-convergence.

A non-increasing rearrangement of a function $f \in L_1 + L_\infty$ is defined as $\mu_t(f) = \inf\{\lambda > 0 : \mu(|f| > \lambda) \leq t\}$, $t \geq 0$, (see [3, Chapter II, §2]).

A Banach space $(E, \|\cdot\|_E) \subset L_1 + L_\infty$ is called *symmetric* (respectively, *fully symmetric*) if conditions $f \in E$, $g \in L_1 + L_\infty$, $\mu_t(g) \leq \mu_t(f)$ (respectively, $\int_0^t \mu_s(g) ds \leq \int_0^t \mu_t(s) dt$) for all

$t > 0$ imply that $g \in E$ and $\|g\|_E \leq \|f\|_E$. It is clear that every fully symmetric space is a symmetric space.

The examples of fully symmetric spaces are $L_1 \cap L_\infty$ with the norm $\|f\|_{L_1 \cap L_\infty} = \max\{\|f\|_1, \|f\|_\infty\}$, and $L_1 + L_\infty$ with the norm

$$\|f\|_{L_1 + L_\infty} = \inf\{\|g\|_1 + \|h\|_\infty : f = g + h, g \in L_1, h \in L_\infty\}$$

(see [3, Chapter II, §4]). Define

$$\mathcal{R}_\mu = \{f \in L_1 + L_\infty : \mu_t(f) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty\}.$$

By [2, Chapter II, §4, Lemma 4.4] we have that $(\mathcal{R}_\mu, \|\cdot\|_{L_1 + L_\infty})$ is a fully symmetric space.

Since a fully symmetric space $(E, \|\cdot\|_E)$ is an exact interpolation space for the Banach couple (L_1, L_∞) [3, Chapter II, §3], it follows that $T(E) \subset E$ for every $T \in DS$, in addition, $\|T\|_{E \rightarrow E} \leq 1$ (see [3, Chapter II, §4, section 2]). In particular, $T(\mathcal{R}_\mu) \subset \mathcal{R}_\mu$, and the restriction of T on \mathcal{R}_μ is a linear contraction (also denoted by T).

A sequence $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L_0$ is said to converge to $\hat{f} \in L_0$ *almost uniformly (a.u.)* if for every $\varepsilon > 0$ there exists $A \in \mathcal{A}$ such that $\mu(A) \leq \varepsilon$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\hat{f} - f_n)\chi_A\|_\infty = 0$, where χ_A is the characteristic function of the measurable set $A \in \mathcal{A}$.

It is clear that almost uniformly convergence $f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$ implies almost everywhere convergence $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, in addition, (a.u.)-convergence and (a.e.)-convergence coincide if and only if $\mu(\Omega) < \infty$. In the case $\mu(\Omega) = \infty$, generally speaking, the (a.u.)-convergence is stronger than (a.e.)-convergence. For example, if $\Omega = \mathbb{N}$ is the set of all natural numbers, $\mathcal{A} = 2^\mathbb{N}$ is the σ -algebra of all subsets $A \subset \mathbb{N}$ and $\mu(\{n\}) = 1$ for any $n \in \mathbb{N}$, then (a.u.)-convergence is the convergence with respect to the uniform norm $\|\cdot\|_\infty$, but (a.e.)-convergence is the coordinate-wise convergence.

2. Main results

Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a measurable space with σ -finite measure, let $T \in DS$ and let $A_n(T) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k$. The following Theorem is the (a.u.)-version of an individual ergodic theorem for the space \mathcal{R}_μ .

Theorem 1. *Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a measurable space with σ -finite measure. If $T \in DS$ then for every $f \in \mathcal{R}_\mu$ there exists a function $\hat{f} \in \mathcal{R}_\mu$ such that $A_n(T)(f) \xrightarrow{\text{a.u.}} \hat{f}$.*

In the case $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^\mathbb{N}$, $\mu(\{n\}) = 1$ for any $n \in \mathbb{N}$, we get the following.

Corollary 1. *If $T \in DS$ then for every $f \in c_0 = \{\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R} : \xi_n \rightarrow 0\}$ there exists an element $\hat{f} \in c_0$ such that $\|A_n(T)(f) - \hat{f}\|_\infty \rightarrow 0$.*

Let $(E, \|\cdot\|_E) \subset L_1 + L_\infty$ be a fully symmetric space. We say that E satisfies the *uniform individual ergodic theorem* (writing $E \in (UIET)$) if for any $T \in DS$ and $f \in E$ there is a

function $\widehat{f} \in E$ such that $A_n(T)(f) \xrightarrow{\text{a.u.}} f$.

By Theorem 1 we have that $\mathcal{R}_\mu \in (UIET)$. The following theorem gives a criterion for the validity of the uniform individual ergodic theorem for a fully symmetric space $(E, \|\cdot\|_E) \subset L_1 + L_\infty$.

Theorem 2. *Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a measurable space with σ -finite measure and let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a fully symmetric space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. The following conditions are equivalent:*

- (i). $(E, \|\cdot\|_E) \in (UIET)$;
- (ii). $E \subset \mathcal{R}_\mu$.

It should be noted that in the case $f \in (L_1 + L_\infty) \setminus \mathcal{R}_\mu$ there exists $T \in DS$ such that the averages $A_n(T)(f)$ do not a.e.-converge [1, Theorem 3.4].

Using Theorem 2 we get the following (a.u.)-version of Dunford-Schwartz individual ergodic theorem in L_p -spaces.

Corollary 2 *Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a measurable space with σ -finite measure, $\mu(\Omega) = \infty$, and let $1 \leq p < \infty$. If $T \in DS$ then for every $f \in L_p$ there exists a function $\widehat{f} \in L_p$ such that $A_n(T)(f) \xrightarrow{\text{a.u.}} \widehat{f}$.*

References

1. **Chilin V., Litvinov S.** *Validity space of Dunford-Schwartz pointwise ergodic theorem*, ArXiv:1705.02947v1 [math.FA] 8 May 2017, 13 pp.
2. **Dunford N., Schwartz J. T.** *Linear Operators, Part I: General Theory*, John Wiley and Sons. 1988.
3. **Krein S. G., Petunin Ju. I., Semenov E. M.** *Interpolation of Linear Operators*, Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc., 1982, 54.

DIGITAL HEALTH - BIG DATA AND IOT (INTERNET OF THINGS)

Barak R. Y.

Holon Institute of Technology, Holon, Israel, refaelb@hit.ac.il

Digital health is an exciting multidisciplinary domain, involving science, technology and medicine - the convergence of digital and genomic technologies with healthcare, living, and society - to enhance the efficiency of healthcare delivery and make clinical treatments more personalized and precise. It involves the use of information and communication technologies (both hardware and software) to help address the health challenges faced by patients.

Digital health involves many stakeholders, including clinicians, researchers and scientists with a wide range of expertise in healthcare, engineering, social sciences, public health, health economics and management.

LATERALLY COMPLETE COMMUTATIVE REGULAR ALGEBRAS

Ber A. F.¹, Chilin V. I.²

¹*Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,*
aleksey.ber@micros.uz

²*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, vladimirchil@gmail.com*

The development of the theory of Baer $*$ -algebras and C^* -algebras possible to describe the class of AW^* -algebras, which are similar to von Neumann algebras in their algebraic and order properties (see review [1]). The important examples of Baer $*$ -algebras are the algebras $S(\mathcal{M})$ and $LS(\mathcal{M})$ of all measurable and locally measurable operators, affiliated with von Neumann algebras and AW^* -algebras. If \mathcal{M} is an AW^* -algebra and $Q = Q(\nabla)$ is the Stone compact corresponding to the Boolean algebra ∇ of all central projectors in \mathcal{M} , then the center $Z(LS(\mathcal{M}))$ of $*$ -algebra $LS(\mathcal{M})$ is a complexification $C_\infty(\mathbb{C}, Q)$ of an extended f -algebra $C_\infty(Q)$ of all continuous functions on Q taking values in $[-\infty, +\infty]$ and assuming the values $\pm\infty$ possibly on a nowhere-dense subset of Q [1]. The algebras $\mathcal{A} = C_\infty(\mathbb{C}, Q)$ ($\mathcal{A} = C_\infty(Q)$) are examples of commutative regular (in the sense of von Neumann) algebras over field of complex numbers \mathbb{C} (respectively, real numbers \mathbb{R}). In addition, these algebras \mathcal{A} have the following important laterally complete property: the Boolean algebra of all idempotents in \mathcal{A} is complete and for any set $\{a_i\}_{i \in I}$ of pairwise disjoint elements in \mathcal{A} there exists an element $a \in \mathcal{A}$ such that $as(a_i) = a_i$ for all $i \in I$, where $s(a)$ is the support of element $a \in \mathcal{A}$.

The main purpose of this note is to describe the order properties of laterally complete commutative regular algebras over arbitrary topological field.

Let \mathcal{A} be a commutative algebra over the field \mathbb{K} with the unity $\mathbf{1}$ and $\nabla = \{e \in \mathcal{A} : e^2 = e\}$ be a set of all idempotents in \mathcal{A} . For all $e, f \in \nabla$ we write $e \leq f$ if $ef = e$. It is well known (see, for example [3. Proposition 1.6]) that (∇, \leq) is a Boolean algebra. The algebra \mathcal{A} is called regular (in the sense of von Neumann) if for any $a \in \mathcal{A}$ there exists $e \in \nabla$ such that $a\mathcal{A} = e\mathcal{A}$ [4, §2, item 4]. In this case for any $a \in \mathcal{A}$ there exists a unique element $i(a) \in \mathcal{A}$, which is a unique solution of the system: $a^2x = a$, $ax^2 = x$. The map $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ is a bijective and a multiplicative map. In addition, $i(i(a)) = a$, $ai(a) \in \nabla$ and $i(g) = g$ for all $a \in \mathcal{A}$, $g \in \nabla$.

Idempotent $s(a) \in \nabla$ is called the support of an element $a \in \mathcal{A}$ if $s(a)a = a$ and $ga = a$, $g \in \nabla$ imply $s(a) \leq g$. It is clear that $s(a) = ai(a) = s(i(a))$. In particular, $s(e) = e$ for any

$e \in \nabla$. It is obvious that $s(ab) = s(a)s(b)$, in particular, $ab = 0 \Leftrightarrow s(a)s(b) = 0$.

Two elements a and b in an algebra \mathcal{A} are called disjoint elements, if $ab = 0$. A commutative regular algebra \mathcal{A} is called *laterally complete* if the Boolean algebra ∇ of its idempotents is complete and for any set $\{a_i\}_{i \in I}$ of pairwise disjoint elements in \mathcal{A} there exists an element $a \in \mathcal{A}$ such that $as(a_i) = a_i$ for all $i \in I$. The element $a \in \mathcal{A}$ such that $as(a_i) = a_i$, $i \in I$, in general, is not uniquely determined. But always true the equality $a \sup_{i \in I} s(a_i) = b \sup_{i \in I} s(a_i)$, if $a, b \in \mathcal{A}$ and $as(a_i) = bs(a_i) = a_i$ for all $i \in I$.

If Q is the Stone compact corresponding to complete Boolean algebra ∇ then $C_\infty(Q)$ (respectively, $C_\infty(\mathbb{C}, Q)$) is an example of laterally complete commutative algebra over the field \mathbb{R} (respectively, \mathbb{C}).

Let \mathbb{K} be an arbitrary field and let t be the Hausdorff topology on \mathbb{K} . If operations $\alpha \rightarrow (-\alpha)$, $\alpha \rightarrow \alpha^{-1}$, $(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha + \beta$, $(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, are continuous with respect to the topology t , then the pair (\mathbb{K}, t) is called a topological field.

Let (\mathbb{K}, t) be a topological field, let (X, τ) be a topological space and let $\nabla(X)$ be a Boolean algebra of all clopen subsets in (X, τ) . We say that a map $f : (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{K}, t)$ is *almost continuous* if there exists a dense open set $U \subseteq (X, \tau)$ such that the restriction $f|_U : U \rightarrow (\mathbb{K}, t)$ of the map f on the subset U is continuous in U . The set of all almost continuous maps we denote by $AC(X, \mathbb{K})$.

Define $(f+g)(t) = g(t)+g(t)$, $(\alpha \cdot f)(t) = \alpha \cdot f(t)$, $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)$, $f, g \in AC(X, \mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $t \in X$. Since an intersection of two dense open sets is a dense open set, it follows that $f+g, \alpha \cdot f, f \cdot g \in AC(X, \mathbb{K})$ for any $f, g \in AC(X, \mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Thus $AC(X, \mathbb{K})$ is a commutative algebra over field \mathbb{K} with the unit element $\mathbf{1}(t) = 1_{\mathbb{K}}$, $t \in X$, where $1_{\mathbb{K}}$ is the \mathbb{K} -unit.

Consider the following ideal in the algebra $AC(X, \mathbb{K})$:

$$I_0(X, \mathbb{K}) = \{f \in AC(X, \mathbb{K}) : \text{interior of the set } f^{-1}(0) \text{ is dense in } (X, \tau)\}.$$

By $C_\infty(X, \mathbb{K})$ denote the quotient algebra $AC(X, \mathbb{K})/I_0(X, \mathbb{K})$.

The following theorem give examples of laterally complete commutative algebras that are versions of algebras $C_\infty(Q)$ and $C_\infty(\mathbb{C}, Q)$ for any topological fields, in particular, for the field \mathbb{Q}_p of p -adic numbers.

Theorem 1. *The quotient algebra $C_\infty(X, \mathbb{K})$ is a commutative unital regular algebra over the field \mathbb{K} . Moreover, if (X, τ) is a Stone compact, corresponding to the complete Boolean algebra ∇ , then algebra $C_\infty(X, \mathbb{K})$ is laterally complete, and the Boolean algebra of all its idempotents is isomorphic to the Boolean algebra $\nabla = \nabla(X)$.*

Let \mathcal{A} be a commutative regular algebra and ∇ be a Boolean algebra of all idempotents in \mathcal{A} . We define a partial order in \mathcal{A} by setting $a \leq b \Leftrightarrow ai(b) = ai(a) = s(a)$, $a, b \in \mathcal{A}$. It is clear that on the Boolean algebra ∇ this partial order coincides with the natural partial order:

$e \leq f \Leftrightarrow ef = e$, where $e, f \in \nabla$.

Let I be an arbitrary directed set of indexes and let $\{a_i\}_{i \in I}$ be an increasing net from (\mathcal{A}, \leq) , that is $a_i \leq a_j$ if $i \leq j$. The notation $a_i \uparrow a$ means that the net $\{a_i\}_{i \in I}$ is increasing and $\sup_{i \in I} a_i = a \in \mathcal{A}$.

Theorem 2. *A commutative regular algebra \mathcal{A} is laterally complete if and only if for every increasing net $\{a_i\}_{i \in I}$ there exists an element $a \in \mathcal{A}$ such that $a_i \uparrow a$.*

Let \mathcal{A} be a commutative regular algebra over the field \mathbb{K} and let ∇ be the Boolean algebra of all idempotents in \mathcal{A} . An element $a \in \mathcal{A}$ is called *step element* if $a = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$, where $\lambda_k \in \mathbb{K}$ and $e_k \in \nabla$, $k = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. The set $\mathbb{K}(\nabla)$ of all step elements is the least subalgebra of \mathcal{A} containing ∇ .

For a nonempty subset $F \subset \mathcal{A}$ denote by \overline{F}^{oc} the set of all elements a of \mathcal{A} , for which there exists an increasing net $\{a_i\}_{i \in I} \subset F$, such that $a_i \uparrow a$.

Theorem 3. *Let \mathcal{A} be a laterally complete commutative algebra over the field \mathbb{K} and let ∇ be a Boolean algebra of all idempotents in \mathcal{A} . Then $\overline{\mathbb{K}(\nabla)}^{oc}$ is also a laterally complete algebra and $\overline{\mathbb{K}(\nabla)}^{oc} = \mathbb{K}(\nabla)$ if and only if ∇ is a finite Boolean algebra.*

An element $a \in \mathcal{A}$ is called *simple*, if there exists family $\{e_i\}_{i \in I} \subset \nabla$ of nonzero pairwise disjoint elements, such that $s(a) = \sup_{i \in I} e_i$ and $ae_i = \lambda_i e_i$ for some $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i \in I$. It is clear that every step-element is a simple element.

Theorem 4. *If \mathcal{A} is a laterally complete commutative algebra, then an element $a \in \mathcal{A}$ is simple if and only if $a \in \overline{\mathbb{K}(\nabla)}^{oc}$.*

The classical example of a laterally complete commutative algebra \mathcal{A} such that $\overline{\mathbb{K}(\nabla)}^{oc} \neq \mathcal{A}$ is the algebra $\mathcal{A} = L_0[0, 1]$ of all real measurable functions on an interval $[0, 1]$.

Recall, that a complete Boolean algebra ∇ is called *multinormed* if the set of all finite completely additive measures on ∇ separates its points. In the case when the Boolean algebra ∇ is a multinormed, we have the following.

Theorem 5. *If ∇ is a multinormed Boolean algebra, then the following conditions are equivalent:*

- (i). $C_\infty(\mathbb{C}, Q(\nabla)) = \overline{\mathbb{C}(\nabla)}^{oc}$;
- (ii). *The Boolean algebra ∇ is atomic;*
- (iii). $C_\infty(Q(\nabla)) = \overline{\mathbb{R}(\nabla)}^{oc}$.

A complete Boolean algebra ∇ is called *σ -distributive* [5, Chapter II, §19], if for every double sequence $\{e_{nm}\}_{n,m \in \mathbb{N}} \subset \nabla$ one of the following equivalent conditions holds:

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} e_{nm} = \bigwedge_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} e_{n, \varphi(n)}; \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} e_{nm} = \bigvee_{\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} e_{n, \varphi(n)}.$$

Proposition 1. (i). Every a complete atomic Boolean algebra is σ -distributive;

(ii). If ∇ is a multinormed σ -distributive Boolean algebra, then ∇ is an atomic Boolean algebra.

Let (\mathbb{K}, t) be a topological field. If the topology t is not discrete, then the topological field (\mathbb{K}, t) is said to be *nondiscrete*. An example of topological fields is a normed field, that is a field \mathbb{K} equipped with a norm $|\cdot| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the following conditions:

$$(i). |\alpha| \geq 0 \text{ for every } \alpha \in \mathbb{K} \text{ and } |\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0;$$

$$(ii). |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|, |\alpha \cdot \beta| = |\alpha||\beta| \text{ for all } \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Every norm $|\cdot|$ on a field \mathbb{K} defines a metric \mathbb{K} by setting $\rho(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. If (\mathbb{K}, ρ) is a complete metric space, then a normed field $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ is called *complete normed field*. Examples of nondiscrete complete normed field are fields \mathbb{R}, \mathbb{C} and a field \mathbb{Q}_p of p -adic numbers equipped with natural norms [2].

The following theorem describes the class of Stone compact (X, τ) and fields \mathbb{K} , such that the equality $C_\infty(X, \mathbb{K}) = \overline{\mathbb{K}(\nabla)}^{oc}$ holds, where ∇ is the Boolean algebra of all idempotents in the algebra $C_\infty(X, \mathbb{K})$.

Theorem 6. Let \mathbb{K} be a nondiscrete complete normed field, and let (X, τ) be a Stone compact, corresponding to the complete Boolean algebra ∇ . The following conditions are equivalent:

$$(i). C_\infty(X, \mathbb{K}) = \overline{\mathbb{K}(\nabla)}^{oc};$$

(ii). The Boolean algebra ∇ of all clopen subsets in X is σ -distributive.

Remark 1. The implication (ii) \Rightarrow (i) in Theorem 6 holds for any normed field \mathbb{K} .

As an application of Theorem 6, in case of the algebra $S(\mathcal{M})$ of all measurable operators affiliated with a commutative AW^* -algebra \mathcal{M} , we give a description of commutative algebras $S(\mathcal{M})$ and $S_h(\mathcal{M}) = \{x \in S(\mathcal{M}) : x = x^*\}$ using the algebra $C_\infty(X, \mathbb{K})$.

Theorem 7. Let \mathcal{M} be a commutative AW^* -algebra and let (X, τ) be a Stone compact corresponding to the complete Boolean algebra ∇ of all projectors in \mathcal{M} . Then the commutative algebra $S(\mathcal{M})$ (respectively, $S_h(\mathcal{M})$) is isomorphic to the algebra $C_\infty(X, \mathbb{C})$ (respectively, to the algebra $C_\infty(X, \mathbb{R})$).

Theorems 6 and 7 imply the following

Corollary 1. Let \mathcal{M} be a commutative AW^* -algebra and let ∇ be a Boolean algebra ∇ of all projectors in \mathcal{M} . Then the following conditions are equivalent:

(i). The Boolean algebra is σ -distributive;

$$(ii). S_h(\mathcal{M}) = \overline{\mathbb{R}(\nabla)}^{oc};$$

$$(iii). S(\mathcal{M}) = \overline{\mathbb{C}(\nabla)}^{oc}.$$

References

1. **Chilin V. I.** *Partially ordered Baer involutive algebras*, Modern problems of Mathematics: The latest trends, VINITI, Moscow, **27**, 99-128 (1985) [in Russian] (Journal of Soviet Mathematics, **37** (6), 1449-1472 (1987)).
2. **Koblitz N.**, *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, Graduate Texts in Mathematics, 58, second edn. Springer-Verlag, New York, 1984.
3. **Maeda F.**, *Kontinuierliche Geometrien*, Berlin, 1958.
4. **Skornyakov L. A.**, *Dedekind's lattices with complements and regular rings*, Fizmatgiz, Moscow, 1961 [in Russian].
5. **Sikorski R.**, *Boolean algebras*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, N. F., Heft 25. Springer-Verlag, Berlin, 1960.

THE π -WEIGHT AND DENSITY OF N_{τ}^{φ} -KERNEL OF A TOPOLOGICAL SPACE X

Beshimov R. B.¹, Mukhamadiev F. G.²

¹*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, rbeshimov@mail.ru*

²*Tashkent State Pedagogical University, Tashkent, Uzbekistan, farkhod8717@mail.ru*

A.V. Ivanov defined the space NX of complete linked systems (CLS) of a space X in a following way:

Definition 1 [2]. *A linked system M of closed subsets of a compact X is called a complete linked system (a CLS) if for any closed set of X , the condition*

“Any neighborhood OF of the set F consists of a set $\Phi \in M$ ”
implies $F \in M$.

A set NX of all complete linked systems of a compact X is called *the space NX of CLS of X* . This space is equipped with the topology, the open basis of which is formed by sets in the form of $E = O(U_1, U_2, \dots, U_n) \langle V_1, V_2, \dots, V_s \rangle = \{M \in NX : \text{for any } i = 1, 2, \dots, n \text{ there exists } F_i \in M \text{ such that } F_i \subset U_i, \text{ and for any } j = 1, 2, \dots, s, F \cap V_j \neq \emptyset \text{ for any } F \in M\}$, where $U_1, U_2, \dots, U_n, V_1, V_2, \dots, V_s$ are nonempty open in X sets [2].

Definition 2. Let X be a compact space, φ be a cardinal function and τ be an arbitrary cardinal number. We call an N_τ^φ - kernel of a topological space X the space

$$N_\tau^\varphi X = \{M \in NX : \exists F \in M : \varphi(F) \leq \tau\}.$$

Theorem 1. Let X be an infinity T_1 -space, then

$$1) \pi w(N^*X) = \pi w(N_{\aleph_0}^d X) = \pi w(X);$$

$$2) d(N^*X) = d(N_{\aleph_0}^d X) = d(X).$$

Theorem 2. Let X be an infinity T_1 -space, then

$$1) \pi w(N^*X) \leq \aleph_0 \Leftrightarrow \pi w(N_{\aleph_0}^d X) \leq \aleph_0 \Leftrightarrow \pi w(X) \leq \aleph_0;$$

$$2) d(N^*X) \leq \aleph_0 \Leftrightarrow d(N_{\aleph_0}^d X) \leq \aleph_0 \Leftrightarrow d(X) \leq \aleph_0.$$

References

1. Fedorchuk V. V., Filippov V. V. *General topology. Basic constructions.* Moscow, Fizmatlit, 2006, 332 p.
2. Ivanov A. V., *A space of complete linked systems.* Siberian Mathematical Journal, 1986, volume 27, 863-875.

OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS FOR APPROXIMATE CALCULATION OF FOURIER COEFFICIENTS IN A HILBERT SPACE

Boltaev N. D.

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

Numerical calculation of integrals of highly oscillating functions is one of the more important problems of numerical analysis, because such integrals are encountered in applications in many branches of mathematics as well as in other science. Standard methods of numerical integration frequently require more computational works and they cannot be successfully applied.

The earliest formulas for numerical integration of highly oscillatory functions were given by Filon [1] in 1928. The Filon's approach for Fourier integrals

$$I[f; \omega] = \int_a^b e^{i\omega x} f(x) dx$$

is based on piecewise approximation of $f(x)$ by arcs of the parabola on the integration interval. Then finite integrals on the subintervals are exactly integrated.

Afterwards for integrals with different type highly oscillating functions many special effective methods such as Filon-type method, Clenshaw-Curtis-Filon type method, Levin type methods, modified Clenshaw-Curtis method, generalized quadrature rule, Gauss-Laguerre quadrature are worked out.

The present work is devoted to construction of optimal quadrature formulas for approximate calculation of Fourier integrals in the Hilbert space of non-periodic functions which are square integrable with th order derivative.

We consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(h\beta) \quad (1)$$

with the error functional

$$\ell(x) = e^{2\pi i \omega x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(x - h\beta), \quad (2)$$

where C_β are the coefficients of formula (1), $h = 1/N$, $N \in \mathbb{N}$, $i^2 = -1$, $\omega \in \mathbb{Z}$ and $\omega \neq 0$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the characteristic function of the interval $[0,1]$ and $\delta(x)$ is the Dirac delta-function. Functions φ belong to the space $K_2(P_m)$, where

$$K_2(P_m) = \{ \varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi^{(m-1)} \text{ is absolutely continuous} \\ \text{and } \varphi^{(m)} \in L_2(0, 1) \},$$

is the Hilbert space of complex valued functions and in this space the inner product is defined by the equality

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) + \omega^2 \varphi^{(m-2)}(x)) (\bar{\psi}^{(m)}(x) + \omega^2 \bar{\psi}^{(m-2)}(x)) dx, \quad (3)$$

where $\bar{\psi}$ is the conjugate function to the function ψ and the norm of the function φ is correspondingly defined by the formula $\| \varphi \|_{L_2^{(m)}(0, 1)} = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}$ and $\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) + \omega^2 \varphi^{(m-2)}(x)) (\bar{\psi}^{(m)}(x) + \omega^2 \bar{\psi}^{(m-2)}(x)) dx < \infty$.

We note that the coefficients C_β depend on ω , N and m , i.e. $C_\beta = C_\beta(\omega, N, m)$.

The difference between the integral and the quadrature sum

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} \varphi(x_{\beta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx \quad (4)$$

is called the error of the quadrature formula (1).

The error of the formula is a linear functional in $K_2^*(P_m)$, where $K_2^*(P_m)$ is the conjugate space to the space $K_2(P_m)$.

According to the Cauchy-Schwarz inequality we have $|(\ell, \varphi)| \leq \|\varphi\|_{K_2(P_m)} \cdot \|\ell\|_{K_2^*(P_m)}$. Therefore, the error (4) of the formula (1) is estimated by the norm

$$\|\ell\|_{K_2^*(P_m)} = \sup_{\|\varphi\|_{K_2(P_m)}=1} |(\ell, \varphi)|$$

of the error functional (2).

Thus, to estimate of the error of the quadrature formula (1) over the functions of the space $K_2(P_m)$ we must find the norm of the error functional ℓ in the conjugate space $K_2^*(P_m)$.

It is clear that the norm of the error functional ℓ depends on the coefficients C_{β} . The problem of finding the minimum of the norm of the error functional ℓ by coefficients C_{β} when the nodes are fixed (in our case distances between neighbor nodes of the formula (1) are equal, i.e. $x_{\beta} = h\beta$, ($\beta = 0, 1, \dots, N$, $h = 1/N$) is called Sard's problem. And the obtained formula is called the optimal quadrature formula in the sense of Sard. This problem, for the quadrature formulas of the form (1) with $\omega = 0$, was first investigated by Sard in the space $L_2^{(m)}$ for some m .

The main objective of the present paper is to solve the Sard problem for quadrature formulas (1) in the space $K_2(P_m)$ when $\omega \neq 0$ using the S.L.Sobolev's method with $N+1 \geq m$, i.e. to find such coefficients C_{β} that satisfy the following equality

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \right\|_{K_2^*(P_m)} = \inf_{C_{\beta}} \|\ell\|_{K_2^*(P_m)}. \quad (5)$$

Therefore, for constructing the Sard optimal quadrature formula of the form (1) in the space $K_2(P_m)$, we need to solve the following problems.

Problem 1. Find the norm of the error functional ℓ of the quadrature formula (1) in the space $K_2^*(P_m)$.

Problem 2. Find the coefficients C_{β} that satisfy the equality (5).

Here we solve Problems 1 and 2 for the cases $\omega \in \mathbb{Z}$ and $\omega \neq 0$. The main result of the paper is the following.

Theorem. *The coefficients of optimal quadrature formulas in the sense of Sard of the form (1) in the space $K_2(P_m)$ have the following form*

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\lambda_k \sin(\omega h - \omega) - \lambda_k^{N+1} \sin(\omega h) + \lambda_k^2 \sin \omega}{\sin \omega (1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cos(\omega h))} a_k + \frac{\lambda_k^{N+1} \sin(\omega h - \omega) - \lambda_k \sin(\omega h) + \lambda_k^N \sin \omega}{\sin \omega (1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cos(\omega h))} b_k \right) + \\ + K \frac{e^{2\pi i p h} \sin(\omega h - \omega) - e^{2\pi i p h} \sin(\omega h) + e^{4\pi i p h} \sin \omega}{\sin \omega (1 + e^{4\pi i p h} - 2e^{2\pi i p h} \cos(\omega h))} + \frac{\omega - \omega \cos \omega - 2\pi i p \sin \omega}{\sin \omega ((2\pi i p)^2 + \omega^2)}, \\ C_\beta = K e^{2\pi i p h \gamma} + a_1 \lambda_1^\beta + b_1 \lambda_1^{N-\beta}, \quad \beta = \overline{1, N-1} \\ C_N = \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\lambda_k^{N+1} \sin(\omega h - \omega) - \lambda_k \sin(\omega h) + \lambda_k^N \sin \omega}{\sin \omega (1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cos(\omega h))} a_k + \frac{\lambda_k \sin(\omega h - \omega) - \lambda_k^{N+1} \sin(\omega h) + \lambda_k^2 \sin \omega}{\sin \omega (1 + \lambda_k^2 - 2\lambda_k \cos(\omega h))} b_k \right) + \\ + K \frac{e^{2\pi i p h} \sin(\omega h - \omega) - e^{2\pi i p h} \sin(\omega h) + \sin \omega}{\sin \omega (1 + e^{4\pi i p h} - 2e^{2\pi i p h} \cos(\omega h))} + \frac{\omega - \cos \omega + 2\pi i p \sin \omega}{\sin \omega ((2\pi i p)^2 + \omega^2)}, \end{array} \right.$$

where K , λ_k , a_k and b_k , $k = 1, 2, \dots, m-1$ are known.

References

1. **Filon L. N. G.** *On a quadrature formula for trigonometric integrals.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1928, 49, 38-47.

ABOUT THE APPROACH OF APPLICATION OF MATHEMATICAL APPARATUS FOR MORPHOLOGICAL ANALYSIS OF ANALYTICAL LANGUAGES

Boltaev T. B.

Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan, tbbmail@mail.ru

The object of the study of this work is a morphological analysis of natural languages of analytical type [1], including Uzbek and Tajik languages. In particular, the nominal parts of speech in these languages are considered: noun and adjective. Due to the fact that word formations and word combinations in the field of nominal parts of speech are very developed for analytical languages, the morphological analysis of these parts of speech requires a deep knowledge of the methods of analysis.

It is possible consider the task of automation (ie computer processing) of such an analysis. In this case, the methods (algorithms) of analysis must satisfy such conditions as correctness, stability, efficiency (in time, energy and space), etc.

One of the approaches to solving this problem is the use of mathematical apparatus for analyzing formal languages [2] in the process of designing a language processor. Such mechanisms are very developed in connection with the development of formal languages, in

particular programming languages and are widely used in constructing language handlers (compilers, analyzers, specifiers, etc.) [3] for high-level programming languages.

The work is the result of the author's research together with students and undergraduates in modeling the process of automatic (computer) analysis of the nominal parts of speech in analytical languages. The study covers a large general problem: the application of methods of the theory of formal languages in the analysis of text. Since there is already experience of such application for other languages, for example, for English [4], Russian [5], etc., such an investigation makes sense.

References

1. **Melchuk I.** *Aspects of the Theory of Morphology*. Berlin New York, Mouton de Gruyter, 2006, 495.
2. **Aho A. V., Ullman J. D.** *Theory of Parsing, Translation, and Compiling (Volume I: Parsing)*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, Inc. 1972, 1002.
3. **Kasyanov V. N., Pottosin I. V.** *Translators construction methods*. Novosibirsk, Nauka, 1986, p.344. (in russian)
4. **Morneau R.** *The Lexical Semantics of a Machine Translation Interlingua*. http://www.rickmor.x10.mx/lexical_semantics.html
5. **Nojov I. M.** *Morphological and syntactic processing of text (models and programs) PhD Dissertation. Scientific advisor D.G. Lahuti(in russian)*.

SUB-ANALYSIS OF THE RATIONS OF PATIENTS WITH MANDIBULAR FRACTURES

Boymuradov Sh. A., Bobamuratova D. T., Akramova N. T.

Tashkent Medical Academy, Department of otolaryngology and stomatology, Tashkent, Uzbekistan

For patients with jaw fracture -nutrition plays an essential role in both oral and systemic health, including wound healing and immune response .

Objective: To study and evaluate the home ration of patients with the mandible fractures during the treatment.

Materials and methods: To investigate the actual power 37 men and 11 women aged 18-59 years with a fractured mandible in II clinics of the Tashkent Medical Academy. All patients had a similar severity of the general condition (fair, rarely - moderate) are given appropriate surgery (reposition and immobilization of bone fragments of jaws, osteosynthesis) and drug (anti-inflammatory, antibacterial, desensitizing therapy) treatment. Collection of material was carried out 13-20 days after splinting, through interviews and questionnaires, which used specially designed questionnaires, allowing for in-depth study. The chemical composition of foods and dishes were calculated taking into account the preservation of nutrients with some form of heat treatment. The results were compared with the average daily rational consumption of food for the population of Uzbekistan (SanPiN-0105-01; SanPiN-0250-08;). The received data were processed statistically at Microsoft office Excell 2010.

Results and discussion: Intermaxillar fixation jaws blocks chewing process, as they are forced to take liquid and semiliquid food. A liquid diet can help patients feel full and hydrated, but it may lack the necessary protein and nutrients to support repair growth and tissue maintenance. According to the data we obtained, the range of the daily diet products appeared poor, consumption of some products did not reach the standards for healthy persons. In this cases, the diet requirements for patients with jaw fracture must be higher than the recommended daily allowance due to their growth needs. As a result of the survey it was found that calorific value of rations patients was within minimal 1080 kcal/day, maximal energetic value was 3300 kcal / day ($p > 0.01$) and an average of 1870 ± 35 kcal / day, had no statistically significant differences ($p > 0.05$). The energy value of the daily diet of most respondents (77%, $p > 0.05$) was lower than the average daily energy expenditure even of a healthy person. 8% of patients with jaw fracture consumed diet greater than 3000 Kcal / day, the roughly 15% ($p < 0.044$) patients intake was within recommended standards. According to the data of the European and the American Association of parenteral and enteral nutrition (ESPEN, ASPEN) - daily energy value of a healthy person should consist of 25-30 kcal per 1 kg of actual body weight and protein content of the calculation of 1.3-2 g / kg per day; For injuries and inflammations (Cuthbertson et al). 20-25% increased performance of energy metabolism, which depend on the severity of the injury. The patients' diet was poor to animals' proteins, so deficit of meat products were (-46%). Patients going through the healing phase need to also consume enough protein to promote tissue repair. Foods containing proteins increase salivary excretion, thus improving oral clearance of food debris and decreasing the incidence of dental caries and other complications this period (Johansson et al). The protein intake was on average 63,8 \pm 1,3 ($p > 0.05$) was the diet of women, 74,4 \pm 1,8 of men. If considering that in severe injuries protein loss up to '25 (Traumatology 2008), the power completely dissatisfied patients expenditure. A low level of consumption of dairy products (less than 290 grams per day), vegetables and fruits (less than 300 grams per day) was noted, including significant lack in potato consumption (-25%),

vegetables (- 45%) of fruits (-35%), milk and dairy products (-31%). Such a diet is the cause of protein-energy, vitamin and mineral deficiency, which reflects the general (fatigue, weight loss, decreased working ability, low immunity) and the local state (prolonged wound healing, inflammation and other complication) of the patient. Rapid weight loss of 5% or more in one month is considered significant and needs to be immediately evaluated by a physician.

By the analysis of data in the questionnaires patients' diet is related also from socioeconomic status, as people with low income tend to consume high-fat foods and few vegetables and fruits, whereas individuals with greater disposable income consume more whole grains and fresh fruits and vegetables.

Conclusions: Based on these data we can conclude that the diet of patients with fractures of the jaw has insufficient nutritional value, do not correspond on hygiene standards in almost all respects, but also the biological inferiority. It is the need to correct the diet of patients to recommend the inclusion in foods rich in complete protein, unsaturated fats and complex carbohydrates, enriched with vitamins and minerals. It is necessary to conduct studies of patients and care person to proper nutrition. Clinicians should be mindful of patients' current food intake and their nutritional needs to provide effective education on nutrition.

HARMONIC MAPPINGS VIA REAL AND COMPLEX ANALYSIS: 30 YEARS LATER

Bshouti D.

Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, daoud@technion.ac.il

I shall present four different directions in the study of harmonic mappings and leave few open problems in each.

ISOMORPHIC CLASSIFICATION OF $C_\infty(Q)$ -MODULES $l_p(Q)$

Chilin V. I.¹, Karimov J. A.²

¹*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, vladimirchil@gmail.com*

²*Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Tashkent, Uzbekistan*

karimovja@mail.ru

Let ∇ be a complete Boolean algebra with the unit $\mathbf{1}$, let $Q = Q(\nabla)$ be a Stone compact

corresponding to ∇ and let $C_\infty(Q)$ be an algebra of all continuous functions $f : Q \rightarrow [-\infty, +\infty]$, taking the values $\pm\infty$ only on nowhere dense sets in Q (see, for example, [2, Chapter 1, §1.4]).

Let X be an $C_\infty(Q)$ -module with algebraic operations $x + y$ and αx , $x, y \in X$, $\alpha \in C_\infty(Q)$. A set $\{x_i\}_{i \in I}$ in an $C_\infty(Q)$ -module X is called $C_\infty(Q)$ -linearly independent, if for any $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in C_\infty(Q)$, $n \in \mathbb{N}$, the equality $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_{i_k} = 0$, $\{x_{i_k}\}_{k=1}^n \subseteq \{x_i\}_{i \in I}$, implies equalities $\alpha_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, where \mathbb{N} is the set of all natural numbers.

$C_\infty(Q)$ -module X is called n -homogeneous, if there exists an $C_\infty(Q)$ -linearly independent set $\{x_1, \dots, x_n\}$ in X such that $X = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : \alpha_i \in C_\infty(Q)\}$. $C_\infty(Q)$ -module X is called finitely-dimensional, if there exist a finite or countable partition $\{e_i\}_{i=1}^k$, $k \in \mathbb{N}$ or $k = \infty$, of unity $\mathbf{1}$ ($e_i \neq 0, i = 1, \dots, k$) and a finite or a countable set $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ (respectively, $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$) of natural numbers such that $e_i \cdot X$ is an n_i -homogeneous $e_i \cdot C_\infty(Q)$ -module for all $i = 1, \dots, k$. $C_\infty(Q)$ -module X is called infinitely-dimensional if X is not finitely-dimensional.

Let X be $C_\infty(Q)$ -module. A map $\|\cdot\| : X \rightarrow C_\infty(Q)$ is called a $C_\infty(Q)$ -norm if the following properties hold

1. $\|x\| \geq 0$ for any $x \in X$ and $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ for all $x \in X$, $\lambda \in C_\infty(Q)$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for any $x, y \in X$.

Pair $(X, \|\cdot\|)$ is called normed $C_\infty(Q)$ -module. It is always assumed that for each nonzero $e \in \nabla$ there exists $x \in X$ such that $e\|x\| \neq 0 \Leftrightarrow ex \neq 0$ (in this case $C_\infty(Q)$ -module X is called a faithful module).

We say a net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq (X, \|\cdot\|)$ (bo) -converges to element $x \in X$ (notion: $x_\alpha \xrightarrow{(bo)} x$) if $\|x_\alpha - x\| \xrightarrow{(o)} 0$. The net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ is called (bo) -Cauchy net if $\left(\sup_{\alpha, \beta \geq \gamma} \|x_\alpha - x_\beta\|\right) \downarrow 0$. A normed $C_\infty(Q)$ -module is called a Banach module if any (bo) -Cauchy net (bo) -converges to some element of this module.

Below we assume that the Boolean algebra ∇ has a countable type, that is every nonfinite family of nonzero pairwise disjoint elements in ∇ is a countable set. In this case for any $x_\alpha \xrightarrow{(bo)} x$ there exists a sequence $\alpha_1 < \dots < \alpha_n < \dots$, such that $x_{\alpha_n} \xrightarrow{(bo)} x$.

Example 1. Let $1 \leq p \leq \infty$. Consider the $C_\infty(Q)$ -module

$$l_p(Q) = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset C_\infty(Q), \|\{x_n\}\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in C_\infty(Q) \right\}.$$

Then $(l_p(Q), \|\cdot\|_p)$ is infinitely-dimensional Banach $C_\infty(Q)$ -module.

$C_\infty(Q)$ -linearly independent sequence $\{x_n\}$ in infinitely-dimensional Banach $C_\infty(Q)$ -module X is called *basis*, if for any $x \in X$ there exists a unique sequence $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subset C_\infty(Q)$, such that $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n = (bo) - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \alpha_n x_n = x$.

For example, a sequence $e_n = \{0, \dots, 0, \mathbf{1}, 0, \dots\}$, where $\mathbf{1}$ stays on “ n ”-th place, is a basis in $l_p(Q)$ for any $1 \leq p < \infty$.

Theorem 1. *The sequence $\{x_n\}$ in Banach $C_\infty(Q)$ -module X is basis if and only if there exists $0 \leq K \in C_\infty(Q)$ such that*

$$\left\| \sum_{k=1}^m \alpha_k x_k \right\|_X \leq K \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\|_X$$

for any $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset C_\infty(Q)$, $m \leq n$.

A sequence $\{x_n\} \subset X$ is called a *basic sequence*, if $\{x_n\}$ is basis in (bo) -closure $[x_n]$ of $C_\infty(Q)$ -linear hull $\text{Lin}(\{x_n\}, C_\infty(Q)) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : \alpha_i \in C_\infty(Q), i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Example 2. For any subsequence $n_1 < n_2 < \dots$ of natural numbers from \mathbb{N} a sequence $\{e_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subseteq \{e_n\}_{n=1}^\infty$ is a basic sequence in $l_p(Q)$, where $1 \leq p < \infty$.

Two basic sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ in the respective Banach $C_\infty(Q)$ -modules X and Y are *equivalent* (writing $\{x_n\} \sim \{y_n\}$) if whenever we take sequence $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subset C_\infty(Q)$, then the series $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n$ (bo) -converges in $(X, \|\cdot\|_X)$ if and only if the series $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n y_n$ (bo) -converges in $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Theorem 2. *Let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be two basic sequences in Banach $C_\infty(Q)$ -modules X and Y respectively. The following conditions are equivalent:*

- (i) $\{x_n\} \sim \{y_n\}$;
- (ii) *There exists an isomorphism $T : [x_n] \rightarrow [y_n]$, such that $T(x_n) = y_n$ for any $n \in \mathbb{N}$.*

The following theorem is the $C_\infty(Q)$ -version of Proposition 2.1.3 from [1].

Theorem 3. *Let $x_m = \{x_i^{(m)}\}_{i=1}^\infty \in l_p(Q)$, $\|x_m\|_p = \mathbf{1}$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ and let $x_i^{(m)} \xrightarrow{(o)} 0$ when $m \rightarrow \infty$, for any $i \in \mathbb{N}$. Then there exists subsequence $\{x_{m_n}\}$ such that $\{x_{m_n}\}_{n=1}^\infty \sim \{e_n\}_{n=1}^\infty$.*

By using theorems 2 and 3 we obtain the following isomorphic classification of $C_\infty(Q)$ -modules $l_p(Q)$.

Theorem 4. *Let $1 \leq p, q < \infty$. The following conditions are equivalent:*

- (i) $l_p(Q) \approx l_q(Q)$;
- (ii) $p = q$.

References

1. **Albiac F., Kalton N. J.** *Topics in Banach space theory*. Springer, 2006.
2. **Kusraev A. G.** *Dominated operators*. Netherlands, Springer. 2000.

LOCAL ERGODIC THEOREMS IN SYMMETRIC SPACES OF MEASURABLE OPERATORS

Chilin V. I.¹, Litvinov S. N.²

¹*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, vladimirchil@gmail.com*

²*Pennsylvania State University, Hazleton, USA, snl2@psu.edu*

Let \mathcal{M} be a semifinite von Neumann algebra equipped with a faithful normal semifinite trace τ . Let $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ be the lattice of projections in \mathcal{M} . If $\mathbf{1}$ is the identity of \mathcal{M} and $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, we write $e^\perp = \mathbf{1} - e$. Denote by $L^0(\mathcal{M}, \tau)$ the $*$ -algebra of τ -measurable operators affiliated with \mathcal{M} , and let $L^p(\mathcal{M}, \tau)$, $1 \leq p \leq \infty$, $L^\infty(\mathcal{M}, \tau) = \mathcal{M}$, be the noncommutative L^p -space (see, for example, [4]).

A linear map $T : L^1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M} \rightarrow L^1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M}$ is called a *Dunford-Schwartz operator* if $\|T(x)\|_1 \leq \|x\|_1$, $x \in L^1(\mathcal{M}, \tau)$, and $\|T(x)\|_{\mathcal{M}} \leq \|x\|_{\mathcal{M}}$, $x \in \mathcal{M}$. Denote by $DS^+(\mathcal{M}, \tau)$ the set of positive Dunford-Schwartz operators.

Given $x \in L^1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M}$, define

$$\|x\|_{L^1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M}} = \inf\{\|y\|_{L^1(\mathcal{M}, \tau)} + \|z\|_{\mathcal{M}} : x = y + z, x \in L^1(\mathcal{M}, \tau), z \in \mathcal{M}\}$$

Let $\{T_t\}_{t \geq 0} \subset DS^+(\mathcal{M}, \tau)$ be a semigroup strongly continuous on $L^1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M}$, that is, $\lim_{t \rightarrow s} \|T_t x - T_s x\|_{L^1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M}} = 0$ for all $s \geq 0$ and $x \in L^1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M}$. Assume also that $T_0(x) = x$ for each $x \in L^1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M}$ and put

$$A_t(x) = \frac{1}{t} \int_0^t T_s(x) ds, \quad x \in L^1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M}, \quad t > 0.$$

A net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset L^0(\mathcal{M}, \tau)$ is said to converge to $\hat{x} \in L^0(\mathcal{M}, \tau)$ *almost uniformly* (a.u.) (*bilaterally almost uniformly* (b.a.u.)) if for every $\varepsilon > 0$ there exists $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ such that $\tau(e^\perp) \leq \varepsilon$ and $\lim_{\alpha \in A} \|(\hat{x} - x_\alpha)e\|_{\mathcal{M}} = 0$ (respectively, $\lim_{\alpha \in A} \|e(\hat{x} - x_\alpha)e\|_{\mathcal{M}} = 0$). Note that a.u. convergence is generally stronger than b.a.u. convergence.

It was proved in [1, Theorem 3.1] that $A_t(x) \rightarrow x$ b.a.u. as $t \rightarrow 0$ for every $x \in L^1(\mathcal{M}, \tau)$, a local ergodic theorem for $L^1(\mathcal{M}, \tau)$. In [2, Theorem 6.8], this result was established for every

$x \in L^p(\mathcal{M}, \tau)$, $1 < p < \infty$; in addition, it was shown that if $p \geq 2$, the averages $A_t(x)$ converge a.u.

We show a.u. convergence of the averages $A_t(x)$ in the setting when x belongs to an arbitrary fully symmetric space $(E, \|\cdot\|_E) \subset L^1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M}$.

The *non-increasing rearrangement* of $x \in L^0(\mathcal{M}, \tau)$ is defined as

$$\mu_t(x) = \inf\{\lambda > 0 : \tau\{|x| > \lambda\} \leq t\}, \quad t \geq 0, \quad |x| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}.$$

A Banach space $(E, \|\cdot\|_E) \subset L^0(\mathcal{M}, \tau)$ is called *fully symmetric* if conditions

$$x \in E, \quad y \in L^0(\mathcal{M}, \tau), \quad \int_0^s \mu_t(y) dt \leq \int_0^s \mu_t(x) dt \quad \text{for all } s > 0$$

imply that $y \in E$ and $\|y\|_E \leq \|x\|_E$.

It is known that a fully symmetric space $(E, \|\cdot\|_E)$ is an exact interpolation space for the Banach couple $(L^1(\mathcal{M}, \tau), \mathcal{M})$ [3, Chapter II, §3]. Therefore $T(E) \subset E$ and $\|T\|_{E \rightarrow E} \leq 1$ for every fully symmetric space E and any $T \in DS^+(\mathcal{M}, \tau)$.

Define

$$\mathcal{R}_\tau = \{x \in L^1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M} : \mu_t(x) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty\}.$$

It is known that $(\mathcal{R}_\tau, \|\cdot\|_{L^1 + \mathcal{M}})$ is a fully symmetric space. Besides, a fully symmetric space E is contained in \mathcal{R}_τ if and only if $\mathbf{1} \notin E$. Note that if $\tau(\mathbf{1}) < \infty$, then $\mathcal{M} \subset L^1(\mathcal{M}, \tau)$ and $\mathcal{R}_\tau = L^1(\mathcal{M}, \tau)$.

The following theorem provides a maximal ergodic inequality for the ergodic averages $A_t(x)$ in $L^p(\mathcal{M}, \tau)$.

Theorem 1. *Let $\{T_t\}_{t \geq 0} \subset DS^+(\mathcal{M}, \tau)$ be as above. Then for every $x \in L^p(\mathcal{M}, \tau)$, $1 \leq p < \infty$, and $\varepsilon > 0$ there exists $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ such that*

$$\tau(e^\perp) \leq 8 \left(\frac{\|x\|_p}{\varepsilon} \right)^p \quad \text{and} \quad \sup_{t \geq 0} \|e A_t(x) e\|_{\mathcal{M}} \leq 12\varepsilon.$$

Using Theorem 1 we prove an a.u.-version of the local ergodic theorem for $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ (cf. [1, Theorem 3.1]).

Theorem 2. *Let $\{T_t\}_{t \geq 0} \subset DS^+(\mathcal{M}, \tau)$ be as above. Then for every $x \in L^1(\mathcal{M}, \tau)$ the averages $A_t(x)$ converge a.u. to x as $t \rightarrow \infty$.*

Here is an extension of Theorem 2 to \mathcal{R}_τ .

Theorem 3. *If $\{T_t\}_{t \geq 0} \subset DS^+(\mathcal{M}, \tau)$ is as above, then for every $x \in \mathcal{R}_\tau$ the averages $A_t(x)$ converge a.u. to x as $t \rightarrow \infty$.*

An application of Theorem 3 to a fully symmetric space yields the following.

Theorem 4. *Let $E \subset L^0(\mathcal{M}, \tau)$ be a fully symmetric space such that $\mathbf{1} \notin E$, and let $\{T_t\}_{t \geq 0} \subset DS^+(\mathcal{M}, \tau)$ be as above. Then, given $x \in E(\mathcal{M}, \tau)$, the averages $A_t(x)$ converge a.u. to x as $t \rightarrow 0$.*

Now we give application of Theorem 4 to a noncommutative Orlicz space. Let Φ be an Orlicz function, that is, $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ is a convex continuous at 0 function such that $\Phi(0) = 0$ and $\Phi(u) > 0$ if $u \neq 0$. Let

$$L^\Phi(\mathcal{M}, \tau) = \left\{ x \in L^0(\mathcal{M}, \tau) : \tau \left(\Phi \left(\frac{|x|}{a} \right) \right) < \infty \text{ for some } a > 0 \right\}$$

be the corresponding noncommutative Orlicz space, and let

$$\|x\|_\Phi = \inf \left\{ a > 0 : \tau \left(\Phi \left(\frac{|x|}{a} \right) \right) \leq 1 \right\}$$

be the Luxemburg norm in $L^\Phi(\mathcal{M}, \tau)$. If $\tau(\mathbf{1}) = \infty$, then $\tau \left(\Phi \left(\frac{1}{a} \right) \right) = \infty$ for all $a > 0$, hence $\mathbf{1} \notin L^\Phi(\mathcal{M}, \tau)$. Therefore, by Theorem 4, we have that, given $x \in L^\Phi(\mathcal{M}, \tau)$, the averages $A_t(x)$ converge a.u. to x as $t \rightarrow 0$.

References

1. **Castrandas E.** *A Local ergodic theorem in semifinite von Neumann algebras.* Algebras Groups and Geometries, 1996, 13, 71-80.
2. **Junge M., Xu Q.** *Noncommutative maximal ergodic theorems.* J. Amer. Math. Soc., 2007, 20(2), 385-439.
3. **Krein S. G., Petunin Ju. I., Semenov E. M.** *Interpolation of Linear Operators.* Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc., 1982, 54.
4. **Nelson E.** *Notes on non-commutative integration.* J. Funct. Anal., 1974, 15, 103-116.

MEAN ERGODIC THEOREM IN SYMMETRIC SPACES ON INFINITE MEASURE SPACE

Chilin V. I.¹, Veksler A. S.²

¹*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, vladimirchil@gmail.com*

²*Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Usbekistan, aleksandr.veksler@micros.uz*

Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a measurable space with σ -finite measure and let $L_p = L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a classical Banach function space equipped with the norm $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Let $T : L_1 + L_\infty \rightarrow L_1 + L_\infty$ be a Dunford-Schwartz operator (writing $T \in DS$), i.e. T is a linear operator such that $\|T(f)\|_1 \leq \|f\|_1$, $f \in L_1$ and $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, $f \in L_\infty$. Due to Riesz convexity theorem given $1 < p < \infty$, any $T \in DS$ contracts L_p .

According to the Dunford-Schwartz mean ergodic theorem [1, Chapter VIII, Theorem VIII.5.9] for any $T \in DS$ and $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, the Česaro averages $S_n(T)(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(f)$ converge in the space L_p with respect to the norm $\|\cdot\|_p$, when $n \rightarrow \infty$. The version of the Dunford-Schwartz mean ergodic theorem for any separable symmetric spaces of measurable functions on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ is established in the paper [3] in the case $\mu(\Omega) < \infty$.

In this note, we investigate the convergence of Česaro averages $S_n(T)(f)$ in the setting when f belongs to a function symmetric space $(E, \|\cdot\|_E)$ on any measurable space $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ with a σ -finite measure.

A non-increasing rearrangement of a function $f \in L_1 + L_\infty$ is defined as

$$\mu_t(f) = \inf\{\lambda > 0 : \mu(|f| > \lambda) \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

(see [2, Chapter II, §2]).

A Banach space $(E, \|\cdot\|_E) \subseteq L_1 + L_\infty$ is called a *function symmetric* (respectively, a *fully symmetric*) space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, if conditions $f \in E$, $g \in L_1 + L_\infty$, $\mu_t(g) \leq \mu_t(f)$ (respectively, $\int_0^t \mu_s(g) ds \leq \int_0^t \mu_s(f) ds$) for all $t > 0$ imply that $g \in E$ and $\|g\|_E \leq \|f\|_E$. It is clear that every fully symmetric space is a function symmetric space.

It is known that a fully symmetric space $(E, \|\cdot\|_E)$ is an exact interpolation space for the Banach couple (L_1, L_∞) [2, Chapter II, §3]. Thus $T(E) \subseteq E$ for any fully symmetric space E and $T \in DS$, in addition, $\|T\|_{E \rightarrow E} \leq 1$ (see [2, Chapter II, §4, section 2]).

A function symmetric space $(E, \|\cdot\|_E)$ is said to have *order continuous norm* if $\|x_n\|_E \downarrow 0$ whenever $x_n \in E$ and $x_n \downarrow 0$. It is known that L_p -spaces, $1 \leq p < \infty$, have an order continuous norm.

The examples of fully symmetric spaces are $L_1 \cap L_\infty$ with the norm $\|f\|_{L_1 \cap L_\infty} =$

$\max \{\|f\|_1, \|f\|_\infty\}$, and $L_1 + L_\infty$ with the norm

$$\|f\|_{L_1+L_\infty} = \inf \{\|g\|_1 + \|h\|_\infty : f = g + h, g \in L_1, h \in L_\infty\}$$

(see [2, Chapter II, §4]). The spaces L_p , $1 \leq p < \infty$, Orlicz, Lorentz and Marcinkiewicz function spaces are also fully symmetric spaces.

Let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a fully symmetric space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. We say that E satisfies the *mean ergodic theorem* (witting $E \in (MET)$) if for any $T \in DS$ and $f \in E$ there exists a function $\hat{f} \in E$ such that $\|S_n(T)(f) - \hat{f}\|_E \rightarrow 0$.

Theorem 1. *Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a measurable space with σ -finite measure, $\mu(\Omega) = \infty$, and let $(E, \|\cdot\|_E)$ be a fully symmetric space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. If the norm $\|\cdot\|_E$ is not order continuous or $E \subseteq L_1$, then $E \notin (MET)$.*

In the paper [4] is established that every non separable function symmetric spaces $(E, \|\cdot\|_E)$ on $[0, 1]$ is not satisfies the mean ergodic theorem, i.e. $E \notin (MET)$.

Let $\Omega = (0, \infty)$ and ν be Lebesgue measure on the σ -algebra \mathcal{A}_ν of all Lebesgue subsets $A \subseteq (0, \infty)$. Let $(E(0, \infty), \|\cdot\|_{E(0, \infty)})$ be a function symmetric space on $((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$. The fundamental function of a space $(E(0, \infty), \|\cdot\|_{E(0, \infty)})$ is defined as $\varphi_E(t) = \|\chi_{(0, t)}\|_{E(0, \infty)}$, $t \geq 0$, where $\chi_{(0, t)}$ is a characteristic function of a set $(0, t)$. It is clear that $\varphi_E(t) > 0$ for each $t > 0$ and $\varphi_E(t)$ is increasing function. In addition, $\frac{\varphi_E(t)}{t}$ is decreasing function (see [2, Chapter II, §4, Theorem 4.7]). In particular, there exists $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_E(t)}{t} = \alpha(E)$. Note that $\alpha(L_1(0, \infty)) = 1$ and $\alpha(L_p(0, \infty)) = 0$, $1 < p \leq \infty$.

Define

$$E(\Omega) = E(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega) : \mu_t(x) \in E(0, \infty)\}$$

and set

$$\|f\|_{E(\Omega)} = \|\mu_t(x)\|_{E(0, \infty)}, f \in E(\Omega).$$

It is shown in [2] that $(E(\Omega), \|\cdot\|_{E(\Omega)})$ is a function symmetric space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. In this case we say that space $(E(\Omega), \|\cdot\|_{E(\Omega)})$ is generated by the space $(E(0, \infty), \|\cdot\|_{E(0, \infty)})$.

The following Proposition gives a necessary and sufficient condition for the imbedding of a function symmetric space $E(\Omega)$ into space $L_1(\Omega)$.

Proposition 1. $E(\Omega) \subseteq L_1(\Omega)$ if and only if $\alpha(E) > 0$.

Now we give the necessary and sufficient conditions for the inclusion $(E(\Omega), \|\cdot\|_{E(\Omega)}) \in (MET)$.

Theorem 2. *Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a measurable space with σ -finite measure, $\mu(\Omega) = \infty$, and let $(E(\Omega), \|\cdot\|_{E(\Omega)})$ be a fully symmetric space on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ generated by a fully symmetric space $(E(0, \infty), \|\cdot\|_{E(0, \infty)})$. The following conditions are equivalent:*

(i). $(E(\Omega), \|\cdot\|_{E(\Omega)}) \in (MET)$;

(ii). The space $(E(0, \infty), \|\cdot\|_{E(0, \infty)})$ is a separable space and $E(0, \infty)$ is not contained in the space $L_1(0, \infty)$;

(iii). The space $L_1(0, \infty) \cap L_\infty(0, \infty)$ is dense in $(E(0, \infty), \|\cdot\|_{E(0, \infty)})$, $\varphi_E(+0) = 0$ and $\alpha(E) = 0$.

Let ψ be an increasing concave non-zero function on $[0, \infty)$ with $\psi(0) = 0$, and let

$$\Lambda_\psi = \Lambda_\psi(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f \in L_1(\Omega) + L_\infty(\Omega) : \|f\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^\infty \mu_t(f) d\psi(t) < \infty \right\},$$

be the corresponding *Lorentz space*.

It is well-known that $(\Lambda_\psi, \|\cdot\|_{\Lambda_\psi})$ is a fully symmetric space; in addition, the norm $\|\cdot\|_{\Lambda_\psi}$ is order continuous if and only if $\psi(+0) = 0$ and $\psi(+\infty) = +\infty$ [2, Chapter II, §5, Lemma 5.1]. In addition, $\varphi_{\Lambda_\psi(0, \infty)}(t) = \psi(t)$. The application of Theorem 2 yields the following.

Theorem 3. *Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a measurable space with σ -finite measure, $\mu(\Omega) = \infty$, and let ψ be an increasing concave non-zero function on $[0, \infty)$ with $\psi(0) = 0$. The following conditions are equivalent:*

(i). $(\Lambda_\psi, \|\cdot\|_{\Lambda_\psi}) \in (MET)$;

(ii). $\psi(+0) = 0$, $\psi(+\infty) = +\infty$ and $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\psi(t)}{t} = 0$.

References

1. **Dunford N., Schwartz J. T.** *Linear Operators, Part I: General Theory*, John Wiley and Sons, 1988.
2. **Krein S. G., Petunin Ju. I., Semenov E. M.** *Interpolation of Linear Operators*, Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc., 1982, 54.
3. **Veksler A. S.** *Mean ergodic theorem in symmetric spaces*, Sibirsky Matemat. Journal, 1985, 26(4), 189 - 191. (Russian).
4. **Veksler A. S., Fedorov A. L.** *Mean ergodic theorem in non separable function symmetric spaces*, Sibirsky Matemat. Journal, 1988, 29(3), 183 - 185. (Russian).

HOLOMORPHIC SEMICOCYCLES IN BANACH SPACES

Elin M.

ORT Braude College, Karmiel, Israel, mark_elin@braude.ac.il

Semicocycles appear naturally in the study of the asymptotic behavior of non-autonomous differential equations in Banach spaces. They play an important role in the theory of dynamical systems and are closely connected to semigroups of weighed composition operators. In this talk, we consider semicocycles holomorphic in the open unit ball in a complex Banach space and taking values in a Banach algebra.

We study semicocycle properties employing, in particular, their link with semigroups. On the other hand, we discover a dissimilarity of these two classes.

Simplest semicocycles are those independent of the space-variable. So, the problem (called the linearization problem) is to establish whether a semicocycle is cohomologous to such independent one.

Focusing on the linearization problem, we provide some criteria for a semicocycle to be linearizable as well as several easily verifiable sufficient conditions. These conditions are essential even for semicocycles over linear semigroups.

The talk is based on joint work with F. Jacobzon and G. Katriel.

THE DIRICHLET PROBLEM FOR A MIXED TYPE PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATION

Fayazova Z. K.

Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan, z.fayazova@yahoo.com

We consider the Dirichlet problem for a mixed type pseudo- differential equation in two dimensional space. Consider the equation

$$\operatorname{sign} x u_{tt}(x, t) = u_{xxtt}(x, t) + u_{xx}(x, t) \quad (1)$$

on the domain $\Omega = \{(x, t) \mid -1 < x < 1, x \neq 0, 0 < t < \alpha T, \alpha > 0, \alpha \in \mathfrak{R}\}$.

Problem. Find a function $u(x, t)$ satisfying (1) in Ω , the boundary conditions

$$u(-1, t) = \varphi_1(t), u(1, t) = \varphi_2(t), 0 \leq t \leq \alpha T$$

$$u(x, 0) = \varphi_3(x), u(x, \alpha T) = \varphi_4(x), -1 \leq x \leq 1,$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_3(-1), \varphi_1(\alpha T) = \varphi_4(1), \varphi_2(0) = \varphi_3(1),$$

and the gluing conditions

$$u(-0, t) = u(+0, t), u_x(-0, t) = u_x(+0, t), 0 \leq t \leq \alpha T.$$

The Dirichlet problem for wave equation in rectangular region were considered by Bourgin D.G. and Duffin R.[1], they remark that not for any rectangular region the solution of investigating tasks exists and unique. B.I.Ptashnik [2] try to find conditions to estimate value of "small dominators". Sh.Alimov [3,4] investigate the existence problem for the wave equation subject to the Dirichlet boundary condition in a rectangle with irrational ratio of the sides. For an arbitrary right-hand side from some anisotropic Nikol'ski space he establish the existence of an L²-solution which satisfies the equation in a distribution sense and vanishes on the boundary in an integral sense. One can prove by the way as in [5] the considering by as problem has not unique solution for any rectangular region and not continuously depend of givens. We find conditions to the sides of rectangular region when the unique solution exists and stable with the respect to variation of givens. In proofing this results we use Integral Energy Method, General spectral Method, Number-theoretic Method and others.

References

1. **Bourgin D. G., Duffin R.** *The Dirichlet problem for the vibrating string equation.* Bull. Amer. Math. Soc., 1939, V.45, No12, pp.851-858.
2. **Ptashnik B. I.** *Nekororie granichnie zadachi dlya differentsialnix uravneniy s chastnimi proizvodnimi.* Kiev. Naukova dumka, 1984.
3. **Alimov Sh. A.** *On L- solutions of a boundary value problems.* Uzbek. Math. Zh., 1999, N 1, pp. 3-9.
4. **Alimov Sh. A.** *On the solvability of an ill-posed problem.* Uzbek. Math. Zh., 1999, N 3, pp. 19-29.
5. **Ivanov V. K., Tanana V. P., Vasin V. V.** *Lineynie nekorreктnie zadachi i ich prilozheniya (Linear ill-posed problems and its applications).* M.: Nauka.

**SPEEDUP OF LEXICOGRAPHIC OPTIMIZATION BY SUPERIORIZATION
AND ITS APPLICATIONS TO CANCER RADIOTHERAPY TREATMENT****Gibali A.**

Mathematical Center of University of Haifa & ORT Braude College, Israel,
avivg@braude.ac.il

Multicriteria optimization problems occur in many real life applications, for example in cancer radiotherapy treatment and in particular in intensity modulated radiation therapy (IMRT). In this talk we focus on optimization problems with multiple objectives that are ranked according to their importance. We solve these problems numerically by combining lexicographic optimization with our recently proposed level set scheme, which yields a sequence of auxiliary convex feasibility problems; solved here via projection methods. The projection enables us to combine the newly introduced superiorization methodology with multicriteria optimization methods to speed up computation while guaranteeing convergence of the optimization.

This is a joint work with Esther Bonacker, Karl-Heinz Küfer and Philipp Süß (Fraunhofer ITWM).

**STRENGTHENED BOUNDS OF TEICHMÜLLER-WITTICH-BELISKIÏ
THEOREMS IN HIGHER DIMENSIONS****Golberg A.**

Holon Institute of Technology, Holon, Israel, golberga@hit.ac.il

The conformality of a mapping in a domain is a strongly rigid property even on the plane. In higher dimensions this property holds, in view of the classical Liouville theorem, only for a poor set of mappings (which only consists of the Möbius transformations). On the other hand, a natural extension of conformality is given by quasiconformal mappings, and the differentiability almost everywhere closely relates to local weak conformality.

In the talk, we provide the local sufficient conditions for homeomorphisms in \mathbb{R}^n to be real differentiable at a point, weakly conformal at a point, Hölder continuous, preserving angles, etc. in the connection with the classical Teichmüller-Wittich-Beliskiï theorem. This involves some new dilatations (directional dilatations) that are more flexible. Such dilatations and their distortion are related to Mechanics and Physics.

COMPUTER MODELING INTERACTION OF THYROID GLAND FOLLICLE CELLS

Hasanov A. A.

Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies, Tashkent, Uzbekistan, adhamjon-05@mail.ru

World statistics of thyroid disease are found in almost 30 percent of the world's population. In this case, according to statistics from the increase in the incidence of thyroid cancer in the world is 5 percent per year [1].

Currently, mathematical and computer modeling is an effective method for modeling living systems.

The main structural and functional unit of the thyroid gland is the follicle. It consists of epithelial cells that take an active part in the formation of the main hormones of the thyroid gland. During the life of the cell follicular phase are dividing, growth, differentiation, perform specific functions associated with the formation of hormones, as well as aging. We are modeling at the level of cellular communities. This approach was developed by D.Sc., head of the laboratory "Regulatorika" of the Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies at Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi M. Saidalieva [2].

In this case we use Goodwin type equations for mathematical modeling of regulatory mechanisms functioning (regulatorika) of the follicle cells of the thyroid gland.

Consider one of the possible quantitative studies of the mechanisms of regulation of the size of the follicle cells of the thyroid gland in the individual phases of their life, using modeling techniques of regulatory functional units of cellular communities. Generally the regulatorika of number of a follicle thyroid gland cells can be described by the following functional-difference equations in the following form [3]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dX_1(t)}{dt} &= \frac{a_1 X_1(t-1) X_4(t-1)}{1+d \prod_{j=1}^5 X_j(t-1)} + b_1 X_2(t-1) - a_2 X_1(t); \\
 \frac{dX_2(t)}{dt} &= a_2 X_1(t-1) - (b_1 + a_3) X_2(t); \\
 \frac{dX_3(t)}{dt} &= a_3 X_2(t-1) + b_2 X_5(t) - (a_4 + a) X_3(t); \\
 \frac{dX_4(t)}{dt} &= a_4 X_3(t-1) - (a_5 + b) X_4(t); \\
 \frac{dX_5(t)}{dt} &= a_5 X_4(t-1) - (b_2 + c) X_5(t).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Here X_1, X_2, \dots, X_5 are the quantities characterizing the number of fissionable growing, differentiating, performing a specific function and aging of cells in the follicle at a time t .

The system of differential-delay equations (1) is a closed system and its solution can be constructed by the Bellman-Cooks method of successive integration [4].

On the basis of the equations of mathematical models of cellular communities regulatorika the number of cells of thyroid follicles we created a computer model of control regulatory cells number of thyroid follicles at norm and at malignant tumor using of object-oriented programming language Delphi-XE3.

Thus, computer modeling of the regulatory of the number of cells of the follicle of the thyroid gland allows one to investigate the functioning of the interaction of the cellular communities of the follicular system during the synthesis of its main hormones of the thyroid gland.

Reference

1. <http://www.endonorm.ru/shchitovidnaya-zheleza/>, <http://www.rcrm.by/news.html>
2. **Saidaliev M.** *Modeling of regulatory mechanisms of cellular communities of multicellular organisms.* Mathematical Modeling, 2004, v.16. No 10. Moscow. 67-80 p.
3. **Saidaliev M., Hasanov A. A.** *Modeling the mechanisms of a thyroid gland follicle's cells regulatorika control.* Uzbek Journal of the problems of informatics and energetics. 2012, ϵ 1. Tashkent. 35-41 p.
4. **Bellman R., Cooke K.** *Differential Difference Equations.* Academic Press. 1963. - 548 p.

INTERVAL GAUSS-SEIDEL METHOD FOR CALCULATION OF THE SET MODES OF ELECTRIC SYSTEMS

Ibragimov A. A.¹, Tokhirov F. J.²

¹*Navoi State Pedagogical Institute, Navoi, Uzbekistan, alim-ibragimov@mail.ru*

²*Navoi State Pedagogical Institute, Navoi, Uzbekistan, toxirovferuz@mail.ru*

Problems of calculation of electric chains are quite often characterized by presence of nondeterministic parameters which accounting, at limitation of their fluctuation, can be carried out by interval methods [1]. In difference from probabilistic methods or methods of the theory of fuzzy sets, interval methods keep informational content as for required parameters at this approach we receive the top and lower estimates, namely intervals which are guaranteed containing unknown characteristics of process or the phenomenon. In turn the task of interval values of parameters of elements of an electric chain and operating modes, is caused by their natural dispersion, a variation in the course of functioning, errors of measurements of the modes or other factors.

Below we will use designations from the draft of the informal international standard for interval values [2]. In particular, interval values are highlighted in the text in bold type, and not interval are not selected in any way.

In this work the problem of calculation of electric circuits with interval parameters which comes down to the solution of interval system of the non-linear algebraic equations connecting currents and tension in clusters of an electrical network at an interval non-determination of input datas is considered:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j = \frac{\mathbf{s}_i}{\dot{x}_i} - a_{i0} x_0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

or

$$\dot{x}_i \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{ij} x_j = \mathbf{s}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

Designating the left-hand part of the last system through $F(\mathbf{a}, x, \dot{x})$ we can write down it in a short look as $F(\mathbf{a}, x, \dot{x}) = \mathbf{s}$ for $a \in \mathbf{a}$, $s \in \mathbf{s}$. For system (2) the united set of solutions call a set

$$\Xi(F, \mathbf{a}, \mathbf{s}) = \{x \in \mathbb{C} \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists s \in \mathbf{s})(F(a, x, \dot{x}) = s)\}$$

below we will consider a problem of its external interval estimation [3].

Thus, ours I aim stay, whenever possible, the best (i.e. the least on inclusion) the interval vector limiting a set of solutions is $\Xi(F, \mathbf{a}, \mathbf{s})$.

At the solution of system (2) there are particular difficulties in realization of calculations as it is necessary to deal with complex interval matrixes of a high order and with the larger systems of the non-linear equations. It is natural to apply iterative methods of solution to non-linear sets of equations. At the same time the structure of a repetitive process, namely an algorithm as the speed of convergence and quality of the interval solution, namely its width depends on it is significantly important.

Let's look for $\mathbf{x}_i^{(k+1)}$ on $\mathbf{x}_i^{(k)}$, believe $\mathbf{x}_i^{(k+1)} := \mathbf{x}_i^{(k)} \cap (\mathbf{x}_i^{(k)} + \delta^* \mathbf{x}_i^{(k)})$, where $\delta^* \mathbf{x}_i^{(k)}$ are from the equations

$$\delta^* \dot{\mathbf{x}}_i^{(k)} \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j^{(k)} + \dot{\mathbf{x}}_i^{(k)} \left(\sum_{j=1}^i \mathbf{a}_{ij} \delta^* \mathbf{x}_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n \mathbf{a}_{ij} \delta^* \mathbf{x}_j^{(k-1)} \right) = \mathbf{s}_i - \dot{\mathbf{x}}_i^{(k)} \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j^{(k)}, \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad \delta^* \mathbf{x}_j^{(-1)} = 0.$$

These formulas allow to find sequentially $\delta^* \mathbf{x}_1^{(k)}, \dots, \delta^* \mathbf{x}_n^{(k)}$. Actually formulas (3) give one cycle of the interval Gauss-Seidel method of the solution of system (1).

Let again $\varepsilon_i^{(k)} = \mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i$, then $\delta^* \mathbf{x}_i^{(k)} = \varepsilon_i^{(k+1)} - \varepsilon_i^{(k)}$. Let's substitute in a formula

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_i^{(k)} \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j^{(k)} + \dot{\mathbf{x}}_i^{(k)} \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \delta \mathbf{x}_j^{(k)} = \mathbf{s}_i - \dot{\mathbf{x}}_i^{(k)} \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

instead of $\delta \mathbf{x}_i^{(k)}$ and $\delta \mathbf{x}_i^{(k-1)}$ the corresponding expressions, and instead of \mathbf{x}_i – its representation on (4), having replaced in it \mathbf{x}_i on $\mathbf{x}_i^{(k)} - \varepsilon_i^{(k)}$. Let's receive system

$$\begin{aligned} & \dot{\varepsilon}_i^{(k+1)} \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{ij} \mathbf{x}_j^{(k)} + \dot{\mathbf{x}}_i^{(k)} \sum_{j=1}^i \mathbf{a}_{ij} \varepsilon_i^{(k+1)} = \\ & = -2\dot{\mathbf{x}}_i^{(k)} \sum_{j=i+1}^n \mathbf{a}_{ij} \varepsilon_j^{(k)} + \dot{\mathbf{x}}_i^{(k)} \sum_{j=i+1}^n \mathbf{a}_{ij} \varepsilon_j^{(k-1)} + \dot{\varepsilon}_i^{(k)} \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \varepsilon_j^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5)$$

Here we have the ratios connecting errors not of two successive approximations as it was [3] earlier, and three: $(k-1)$, k and $(k+1)$. Besides, these ratios are non-linear. As their research is bound to quite unwieldy calculations, here we will not give the corresponding estimates similar estimates from [4].

Numerical experiments showed that when calculating for the interval Gauss-Seidel method (5) the number of iterations is significantly reduced and it gives more narrow external estimates of sets of solutions unlike the interval Krawczyk method [3]. Besides, it was experimentally established that the interval Gauss-Seidel method (5) allows to receive the answer in those tasks to which the interval Krawczyk method is inapplicable.

References

1. **Moore R. E.** *Interval Analysis*. –Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1966.
2. **Kearfott R. B., Nakao M. T., Neumaier A., Rump S. M., Shary S. P., Hentenryck P.** *Standardized notation in interval analysis*. Computational Technologies, 2010. Vol. 15, №1. pp. 7–13.
3. **Shary S. P.** *Finite-dimensional interval analysis*. Institute of Computational Technologies of SB RAS. - Novosibirsk: XYZ publishing, 2010.
4. **Ibragimov A. A.** *Interval iterated methods of solution of the nodal equations of the set modes of electrical networks*. Bulletin of the National university of Uzbekistan, 2010. №3, pp. 87-91.

BOUNDEDNESS OF MAXIMAL OPERATORS ASSOCIATED TO HYPERSURFACES

Ikromov I. A.

Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan, ikromov1@rambler.ru

Let S be a smooth hypersurface in R^n and let $\rho \in C_0^\infty(S)$ be a smooth non-negative function with compact support. Consider the associated averaging operators $A_t, t > 0$, given by

$$A_t f(x) := \int_S f(x - ty) \rho(y) d\sigma(y),$$

where $d\sigma$ denotes the surface measure on S . The associated maximal operator is given by

$$Mf(x) := \sup_{t>0} |A_t f(x)|, \quad (x \in R^n). \quad (1)$$

We remark that by testing M on the characteristic function of the unit ball in R^n , it is easy to see that a necessary condition for M to be bounded on $L^p(R^n)$ is that $p > n/(n-1)$, provided the transversality assumption below is satisfied.

In 1976, E. M. Stein [3] proved that, conversely, if S is the Euclidean unit sphere in R^n , $n \geq 3$, then the corresponding spherical maximal operator is bounded on $L^p(R^n)$ for every $p > n/(n-1)$. The analogous result in dimension $n = 2$ was later proven by J. Bourgain [1]. The key property of spheres which allows to prove such results is the non-vanishing of the Gaussian curvature on spheres. These results became the starting point for intensive studies of various classes of maximal operators associated to subvarieties. Stein's monography [3] is an excellent reference to many of these developments.

In the joint work [4] of our paper, maximal functions M associated to smooth hypersurfaces of finite type in R^3 had been studied under the following transversality assumption on S .

Transversality Assumption: The affine tangent plane $x + T_x S$ to S through x does not pass through the origin in R^3 for every $x \in S$. Equivalently, $x \notin T_x S$ for every $x \in S$, so that $0 \notin S$ and x is transversal to S for every point $x \in S$.

Let us fix a point $x^0 \in S$. We recall that the transversality assumption allows us to find a linear change of coordinates in R^3 so that in the new coordinates S can locally be represented as the graph of a function ϕ , and that the norm of M when acting on $L^p(R^3)$ is invariant under such a linear change of coordinates. More precisely, after applying a suitable linear change of coordinates to R^3 we may assume that $x^0 = (0, 0, 1)$, and that within the neighborhood U , S is given as the graph

$$U \cap S = \{(x_1, x_2, 1 + \phi(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in \Omega\}$$

of a smooth function $1 + \phi$ defined on an open neighborhood Ω of $0 \in \mathbb{R}^2$ and satisfying the conditions

$$\phi(0, 0) = 0, \nabla\phi(0, 0) = 0.$$

The measure $\mu = \rho d\sigma$ is then explicitly given by

$$\int f d\mu = \int f(x, 1 + \phi(x))\eta(x) dx,$$

with a smooth, non-negative bump function $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, and we may write for $(y, y_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

$$A_t f(y, y_3) = f * \mu_t(y, y_3) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y - tx, y_3 - t(1 + \phi(x)))\eta(x) dx,$$

where μ_t denotes the norm preserving scaling of the measure μ given by $\int f d\mu_t = \int f(tx, t(1 + \phi(x)))\eta(x) dx$.

Recall also from [4] that the *height* of S at the point x^0 is defined by $h(x^0, S) := h(\phi)$, where $h(\phi)$ is the height of ϕ in the sense of Varchenko (which can be computed by means of Newton polyhedra attached to ϕ). The height is invariant under affine linear changes of coordinates in the ambient space \mathbb{R}^3 .

In [4] the authors had given an essentially complete answer to the problem of L^p -boundedness of M when $h(x^0, S)$ or p are greater or equal to 2. More precisely, if $h(x^0, S) \geq 2$, and if the density ρ is supported in a sufficiently small neighborhood of x^0 , then the condition $p > h(x^0, S)$ is sufficient for M to be L^p -bounded, and this result is sharp (with the possible exception of the endpoint $p_c = h(x^0, S)$, when S is non-analytic).

The main result of the talk is the following:

Theorem. *Assume at the point $x^0 \in S$ both principal curvatures of the smooth hypersurface S vanish then there exists a neighborhood U of the point x^0 such that for any non-negative function $\rho \in C_0^\infty(U)$ the associated maximal operator (1) is bounded on $L^p(\mathbb{R}^3)$ provided $p > h(x^0, S)$. Moreover, under the transversality assumption and the condition $\rho(x^0) > 0$ for $p < h(x^0, S)$ the maximal operator is unbounded on $L^p(\mathbb{R}^3)$.*

Remark. The case when $h(x^0, S) \geq 2$ the theorem has been proved in [4], the result for the case when $h(x^0, S) < 2$ is contained in our joint paper [5].

References

1. **Bourgain, J.** *Estimations de certaines fonctions maximales.. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 301 (1985) no. 10, 499–502.
2. **Stein, E. M.** *Maximal functions. I. Spherical means. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 73 (1976), no. 7, 2174–2175.

3. **Stein, E. M.** *Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*. Princeton Mathematical Series 43. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 73 (1976), no. 7, 2174–2175.
4. **Buschenhenke S., Dendrinos S., Ikromov I. A., Müller D.** *Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in R^3 with height $h < 2$: Part I*, Archive, 2017.

ANALOGUE OF THE WEIERSTRASS THEOREM FOR $A(z)$ -ANALYTICAL FUNCTIONS

Jabborov N. M.¹, Otaboev T. U.²

¹*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, jabborov61@mail.ru*

²*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, tolib.fgi@gmail.com*

The present work is devoted to the theory of analytic solutions of the Beltrami equation

$$f_{\bar{z}}(z) = A(z) f_z(z), \quad (1)$$

which is directly related to the quasi-conformal mappings. The function $A(z)$ is, in general, assumed to be measurable with $|A(z)| \leq C < 1$ almost everywhere in the domain $D \subset \mathbb{C}$ under consideration. Solutions of equation (1) are often referred to as A -analytic functions in the literature.

The solutions of equation (1), as well as quasi-conformal homeomorphisms in the complex plane \mathbb{C} have been studied in sufficient details. Here we confine ourselves by giving the references ([1], [4-5], [8-10]).

The aim of this report is to investigate analytic functions in one particular case, when the function is an anti-analytic function in the considered domain. We prove an analogue of the Weierstrass theorem for a function series in analytic functions and the expansion of analytic functions in the functional series.

Let A is anti-analytic, $\partial A = 0$ in $D \subset \mathbb{C}$ such that $|A(z)| \leq C < 1$, $\forall z \in D$. We put

$$D_A = \frac{\partial}{\partial z} - \bar{A}(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{D}_A = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - A(z) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Then according to (1) the class of A -analytic functions $f \in O_A(D)$ characterized by the fact that $\bar{D}_A f = 0$. Since, anti-analytic function is infinitely smooth, then from theorem 3 implies that $O_A(D) \subset C^\infty(D)$.

Now we assume that the domain $D \subset \mathbb{C}$ is convex and $\xi \in D$ its fixed point. We consider the function

$$K(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau) d\tau}}, \quad (2)$$

where $\gamma(\xi, z)$ is a smooth curve which connects the points $\xi, z \in D$. Since the domain is simply connected and the function $\bar{A}(z)$ is holomorphic, then the integral $I(z) = \int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau) d\tau$ does not depend on a path of integration; it coincides with a primitive, i.e. $I'(z) = \bar{A}(z)$.

The function $\psi(z, \xi) \in O_A(D)$ carries out an internal mapping. In particular, the set

$$L(\xi, r) = \left\{ z \in D : |\psi(z, \xi)| = \left| z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi, z)} \bar{A}(\tau) d\tau} \right| < r \right\}$$

is open in D . For sufficiently small $r > 0$ it compactly belongs to D and contains the point ξ . This set is called A -lemniscate with center ξ and denoted by $L(\xi, r)$. It is a simply connected domain (see. [13]).

Theorem. (Analogue of Weierstrass theorem). *If a series of $A(z)$ -analytic functions in the domain D*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad f_n(z) \in O_A(D), \quad (11)$$

converges uniformly on any compact subset of this domain, then

1. $f(z) \in O_A(D)$;
2. the series (11) can be differentiated term by term:

$$\partial f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial f_n(z), \quad \bar{\partial} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\partial} f_n(z), \quad D_A f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} D_A f_n(z) \quad (12)$$

3. the series (12) converge uniformly on any compact subset D .

References

1. **Ahlfors L.** *Lectures on quasiconformal mappings.* Toronto-New York-London, 1966, 133 pp.
2. **Берс Л.** *Математические вопросы дозвуковой и околзвучковой газовой динамики.* М., ИЛ, 1961.
3. **Bers L.** *An outline of the theory of pseudoanalytic functions.* Bull AMS, 1956, V. 62, no.4, pp.291-331.

4. **Bojarski B.** *Homeomorphic solutions of Beltrami systems.* Докл. АН СССР, 1955, Т.102 №4, стр.661-664.
5. **Bojarski B.** *Generalized solutions of a system of differential equations of the first order of the elliptic type with discontinuous coefficients.* Мат. Сб., 1957, Т. 43(85), стр.451-503.
6. **Бухгейм А.Л.** *Формулы обращения в обратных задачах.* Дополнение к книге Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. "Линейные операторы и некорректные задачи" М., «Наука», 1991.
7. **Бухгейм А.Л., Казанцев С.Г.** *Эллиптические системы типа Бельтрами и задачи томографии.* Докл. АН СССР, 1990. Т. 315, №1, стр. 15-19.
8. **Векуа И.Н.** *Обобщенные аналитические функции.* М., «Наука», 1988, 512 с.
9. **Волковыский Л.И.** *Квазиконформные отображения.* Львов, 1954.
10. **Gutlyanski V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.** *The Beltrami equation: a geometric approach.* Springer, 2011.
11. **Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х.** *Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред.* Монография, 2012, 212 с.
12. **Жабборов Н.М., Отабоев Т.У.** *Теорема Коши для $A(z)$ -аналитических функций.* Узбекский математический журнал, 2014, №1, стр. 15-18.
13. **Жабборов Н.М., Отабоев Т.У.** *Аналог интегральной формулы Коши для A - аналитических функций.* Узбекский математический журнал, 2016, №4, стр. 50-59.
14. **Sadullaev A., Jabborov N.M.** *On a class of A -analytic functions.* Siberian Federal University, Maths and Physics, 2016 y 9(3), с. 374-383.

REGULARITY OF A VOLTERRA CUBIC STOCHASTIC OPERATOR

Jamilov U. U.

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,
jamilovu@yandex.ru

Let

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \text{ for any } i \text{ and } \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$$

be the $(m - 1)$ -dimensional simplex.

A *cubic stochastic operator* (CSO) is a mapping $V: S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ of the form

$$V: x'_l = \sum_{i,j,k=1}^m p_{ijk,l} x_i x_j x_k, \quad l = 1, \dots, m, \quad (1)$$

where $p_{ijk,l}$ are the coefficients of heredity such that

$$p_{ijk,l} \geq 0, \quad \sum_{l=1}^m p_{ijk,l} = 1, \quad i, j, k, l = 1, \dots, m, \quad (2)$$

and the coefficients $p_{ijk,l}$ do not change for any permutation of i, j and k .

For a given $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$ the *trajectory* $\mathbf{x}^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots$, of an initial point $\mathbf{x}^{(0)}$ under the action of the CSO (1) is defined by $\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)})$, where $n = 0, 1, 2, \dots$

One of the main problems in mathematical biology consists in the study of the asymptotical behaviour of the trajectories.

The following notations will be used in the below. Let $E = \{1, 2, \dots, m\}$.

Let the set $\partial S^{m-1} = \{\mathbf{x} \in S^{m-1} : x_i = 0 \text{ for at least one } i \in E\}$ be the boundary of the simplex S^{m-1} ;

the set $\Gamma_\alpha = \{\mathbf{x} \in S^{m-1} : x_i > 0, \quad i \in \alpha \subset E\}$ a face of the simplex S^{m-1} ;

the set $\text{int}S^{m-1} = \{\mathbf{x} \in S^{m-1} : x_1 x_2 \cdots x_m > 0\}$ the interior of S^{m-1} ;

C is the center of the simplex S^{m-1} and $C(\alpha) = (c_1, c_2, \dots, c_m)$, where

$$c_i = \begin{cases} \frac{1}{|\alpha|}, & i \in \alpha, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

is the center of the face Γ_α . Note that $|\cdot|$ denotes the number of elements of a set;

Let $\omega(\mathbf{x}^0)$ be the set of limit points of the trajectory $\{V^n(\mathbf{x}^0) \in S^{m-1}\}_{n=0}^\infty$.

In general, the main problem of the study of the asymptotic behaviour of any CSO is also a difficult problem, which remains open, even in the two-dimensional simplex case.

Consider a family of the following CSOs

$$V_\theta: x'_l = x_l \left(x_l^2 + 3\theta x_l \sum_{i \in E \setminus \{l\}} x_i + 3(1 - \theta) \sum_{i \in E \setminus \{l\}} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i, j \in E \setminus \{l\} \\ i < j}} x_i x_j \right), \quad l \in E. \quad (3)$$

Note that in [1] we considered the case $\theta = 1$. Besides, if $\theta = \frac{2}{3}$, then it is the identity operator in the CSO (3). We consider the case $\theta \in [0, 1), \theta \neq \frac{2}{3}$.

Denote $I(\mathbf{x}) = \{i : x_i = \max_{1 \leq k \leq m} x_k\}$. The following theorem gives full description of the set of limit points of the trajectory.

Theorem 1.

- i) If $\theta > \frac{2}{3}$ then $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(n)} = C(\Gamma_{I(\mathbf{x}^0)})$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$;
- ii) If $\theta < \frac{2}{3}$ and $\mathbf{x}^{(0)} \in \text{int}S^{m-1}$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(n)} = C$;
- iii) If $\theta < \frac{2}{3}$ and $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma_\alpha$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(n)} = C(\Gamma_\alpha)$.

A CSO V is called *regular* if the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} V^n(\mathbf{x})$ exists for an initial point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$.

From Theorem 1 we get

Corollary 2. For any parameter θ the operator V_θ defined in (3) is a regular operator.

References

1. **Rozikov U. A., Khamraev A. Yu.** On cubic operators defined on finite-dimensional simplices, Ukrainian Math. J., 2004, 56 (10), 1699-1711.

SECOND HARMONIC GENERATION IN A TIME-DEPENDENT OPTICAL TRAP

Karpova O.¹, Abduvohitov H.², Rakhmanov S.¹

¹Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan, ola_july@mail.ru

²National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, habduvohitov@mail.ru

Nonlinear phenomena in quantum optics have attracted much attention recently [1-3]. Such phenomena play important role in many functional nanoscale materials and devices of photonics and opto-electronics. Optical harmonic generation in quantum optical system is one of such effects. Recently harmonic generation in optically driven quantum dots have been studied by some authors using density matrix based approach. In this work we study second harmonic generation in a quantum box with moving boundaries. It is assumed that the boundary is provided by optical trap. Solving Liouville-von Neumann equation by the iteration method we find density matrix up to third order approximation. Using the obtained results for density matrix we compute nonlinear susceptibility in different approximations and optical rectification.

References

1. **Boyd R. W.** *Nonlinear Optics*. 2nd ed., Academic Press, 2003, 620 pages.
2. **Rosencher E., Bois Ph.** *Model system for optical nonlinearities: Asymmetric quantum wells*. Phys. Rev. B, 1991, 44, 11315-11327.
3. **Mohammadi S. A., Khordad R., Rezaei G.** *Optical properties of a semispherical quantum dot placed at the center of a cubic quantum box: Optical rectification, second and third-harmonic generations*. Physica E, 2016, 76, 203-208.

FINITE SPEED PERTURBATION DISTRIBUTION AND SPATIAL LOCALIZATION FOR THE DOUBLE NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH SOURCE OR ABSORPTION

Khojimurodova M.

Tashkent University of Information Technology, Tashkent, Uzbekistan, mohim15-85@mail.ru

In this talk, we will consider qualitative properties solutions to the following problem Cauchy in the domain $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$ to the double nonlinear degenerate parabolic equation with source or absorption

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(k(t, x)u^\sigma |\nabla u|^k \nabla u) + \varepsilon \gamma(t, x)u^\beta = 0, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in R^N, \quad (2)$$

where $\sigma > 0, \beta > 0$ are given numerical parameters, $\nabla(\cdot) = grad_x(\cdot)$, functions $\gamma(t, x), k(t, x)$ in Q is considered.

The problem (1) describes the processes of a nonlinear diffusion reaction, heat conductivity, a filtration in liquid and a gas in a heterogenic media at a presence of an absorption ($\varepsilon = -1$) or a source ($\varepsilon = +1$) that power is equal to $\gamma(t, x)u^\beta$.

Investigation of the qualitative properties of various type solutions of the problem (1), (2) when $k(t, x) = cons, \gamma(t, x) = 1$ had established by many authors and were received lot of nonlinear effects ([1-3] and references).

The properties of the different type solutions of considered problem is studied. It is proved, that if the coefficient of heat conductivity includes time-dependent function that occurs spatial localization of the solution even an absence of an absorption and presence of a source. It was suggested method of choosing of appropriate initial approximation for a given value of

parameters for the considered nonlinear problem and initial data. Results of the computational experiments were given in visualization and animation forms based on the studied of qualitative properties. Visualization of process of nonlinear heat conductivity with absorption, described by nonlinear parabolic equation is considered.

The aim of this paper is to establish the conditions of a global solvability, including the case of strong absorption ($0 < \beta < 1$), the estimates of solutions for the having physical tense weak solutions and a free boundaries, based on the method of nonlinear splitting standard equations. It was suggested methods of choosing of appropriate initial approximation for a given value of parameters of the equation (1) and initial data. Results of the computational experiments were given in visualization and animation forms based on the studied of qualitative properties.

References

1. **Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurduomov S. P., Mikhajlov A. P.** *Blow-up in quasilinear parabolic equations*. Berlin, 1995. №4, Walter de Grueter, p.535.
2. **Golaydo S, I., Martinson L. K., Pavlov K. B.** *Non-stationary problems of nonlinear heat conductivity with absorption of heat conductivity*. J. Comp. Appl. Math.1973. 13:5, p.1351-1356.
3. **Aripov M., Sadullaeva Sh. A.** *To Properties of Solutions to Reaction-diffusion Equation with Double Nonlinearity with Distributed Parameters*. Journal Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2013, Volume 6(2), p. 157-167.

STRING THEORY: MOTIVATION, CONSEQUENCES AND CHALLENGES

Kroyter M.

Holon Institute of Technology, Holon, Israel, michaelkro@hit.ac.il

We give a brief presentation of the physics and the mathematics of quantum mechanics, special relativity, quantum field theory, and general relativity in order to motivate the introduction of string theory. We then dwell on the results of the developed formalism. In particular, we discuss extra dimensions, supersymmetry, T-duality and non-geometric backgrounds. Some current research directions, such as string field theory, are also introduced.

**TUNGSTEN DISULFIDE NANOPARTICLES AS A MEDIUM FOR
HYDROGEN STORAGE: COMPARISON OF HYDROGENATION METHODS
AND DETERMINATION OF CHEMICAL CONFIGURATION**

**Laikhtman A.¹, Makrinich G.¹, Sezen M.², Martinez J. I.³, Alonso J. A.⁴,
Enachescu M.⁵, Zak A.¹**

¹*Holon Institute of Technology, Holon, Israel, alexl@hit.ac.il*

²*Sabanci University, Istanbul, Turkey*

³*Instituto de Ciencia de Materiales de Madrid, Madrid, Spain*

⁴*University of Valladolid, Valladolid, Spain*

⁵*University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania*

The chemical configuration and interaction mechanism of hydrogen adsorbed in inorganic nanoparticles of WS₂ are investigated. Our recent approaches of using hydrogen activated by either microwave or radiofrequency plasma dramatically increased the efficiency of its adsorption on the nanoparticles surface.¹ In the current work we made an emphasis on elucidation of the chemical configuration of the adsorbed hydrogen.² This configuration is of primary importance as it affects its adsorption stability and possibility of release. To get insight on the chemical configuration, we combined the experimental analysis methods with theoretical modeling based on the density functional theory (DFT). Micro-Raman spectroscopy was used as a primary tool to elucidate chemical bonding of hydrogen and to distinguish between chemi- and physisorption. Hydrogen adsorbed in molecular form (H₂) was clearly identified in all the plasma-hydrogenated WS₂ nanoparticles samples. It was shown that the adsorbed hydrogen is generally stable under high vacuum conditions at room temperature, which implies its stability at the ambient atmosphere. A DFT model was developed to simulate the adsorption of hydrogen in the WS₂ nanoparticles. This model considers various adsorption sites and identifies the preferential locations of the adsorbed hydrogen in several WS₂ structures, demonstrating good concordance between theory and experiment and providing tools for optimizing of hydrogen exposure conditions and the type of substrate materials.

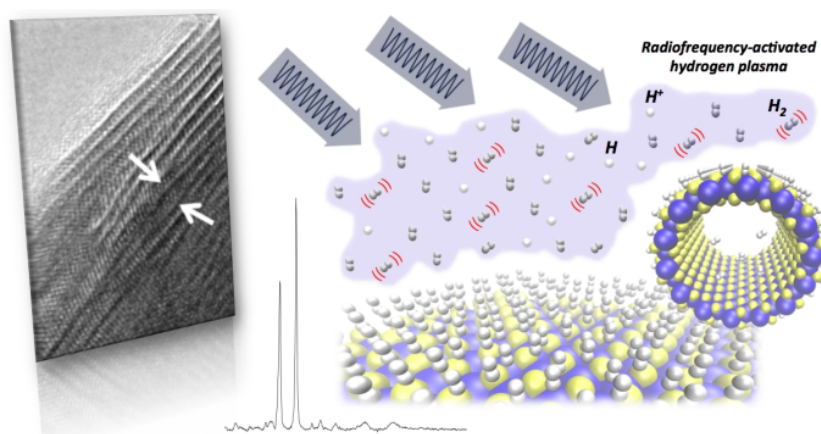


Figure 1: Illustration of hydrogen absorption sites and structure modification in hydrogenated WS2 nanoparticles.

References

1. Laikhtman A., Michaelson S., Hoffman A., Kim T. K., Moon H. R., Zak A. *Int. J. Hydrogen Energ.*, 2014, 39, 9837-9841.
2. Laikhtman A., Makrinich G., Sezen M., Mercan Yildizhan M., Martinez J. I., Dinescu D., Prodana M., Enachescu M., Alonso J. A., Zak A. *J. Phys. Chem.*, 2017, 121, 11747-11756.

ASYMPTOTIC RELATIONS FOR THE FOURIER TRANSFORM OF A FUNCTION OF BOUNDED VARIATION

Lifyand E.

Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel, liflyand@gmail.com

Earlier and recent one-dimensional estimates and asymptotic relations for the cosine and sine Fourier transform of a function of bounded variation are refined in such a way that become applicable for obtaining multidimensional asymptotic relations for the Fourier transform of a function with bounded Hardy variation.

ON THE NOTION OF CONFORMALITY IN THE FOUR DIMENSIONAL SPACE BASED ON BICOMPLEX NUMBERS

Luna-Elizarrarás M. E.

Holon Institute of Technology, Holon, Israel, eluna_10@hotmail.com

One of the basic properties of holomorphic functions in one complex variable is that they realize conformal mappings. The theoretical importance of this property as well as the big amount of applications are well known. In this work there are presented the necessary tools in order to give an analogue of conformality for bicomplex holomorphic functions.

For this, a positive hyperbolic-valued norm defined on the algebra of bicomplex numbers is presented. As a second step it is presented the trigonometric representation of bicomplex numbers in hyperbolic terms, this means that not only the norm of the bicomplex number is positive hyperbolic-valued, but also the argument of it is hyperbolic-valued. The geometry that arises from these facts is analyzed, in particular the notions of hyperbolic lines and curves, and that of the hyperbolic angle between these objects. It is also presented a theorem that asserts that bicomplex holomorphic functions are bi complex conformal at those points where the derivative is neither zero nor zero – divisor.

More about all this one can find in [1] and [2].

References

1. **Alpay D., Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M., Struppa D. C.** *Basics of functional analysis with bicomplex scalars, and bicomplex Schur analysis*. Series Springer Briefs, Springer, 2014.
2. **Luna-Elizarrarás M. E., Shapiro M., Struppa D. C., Vajiac A.** *Bicomplex holomorphic functions: the algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers*. Series Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.

SPLINE METHOD BIOMEDICAL SIGNAL PROCESSING

Makhmudjanov S.

In the field of biomedical signals processing, one often encounters a problem in which, according to the experimental data, it is necessary to restore the general character of the

phenomenon or process. One of the ways to solve this problem is to use spline methods for the approximation of experimental data.

The wide popularity of spline methods is explained by the fact that they serve as a universal tool for the approximation of functions and, in comparison with other mathematical methods, while the information and hardware equals them provide greater accuracy.

Any spline $S_m(x)$ of level m of defect 1, that interpolates the given function $f(x)$ may be represented by an only way by B -splines as :

$$f(x) \cong S_m(x) = \sum_{i=-1}^{m+1} b_i \cdot B_i(x), \quad a \leq x \leq b,$$

where b_i - coefficients, and m - level of Spline.

The computational problems are greatly alleviated by turning to a local spline approximation in which the values of the approximating spline function at each cut depend only on the values of the function being calibrated from some locality of this separation. Another feature of these methods is that they do not require solutions of systems of algebraic equations when the parameters of the spline are nested. The required amount of computing work does not depend on the number of grid nodes, but is determined only by the degree of the spline. The advantages of spline methods are the simplicity of description and greater proximity to the practical requirements of computing mathematics. Mainly, the following two reasons made it possible for rapid development of the one variable spline-functions theory as a tool of digital analysis:

- Good convergence of splines with the approximation objects;
- Simplicity in implementation of algorithms of constructing splines on computers.
- Reliable and fast computation on real time systems

As opposed to polynomials, no particular difficulties occur with the issue of existence and uniqueness of solution in interpolation of functions of many variables for splines. A spline-method of analysis, processing and determination of signals of biomedical structures, based upon the use of basic signals are developing. The developed method allows assessing the fatigue and prognosticating the stability and strength of biomedical signals.

The results will be described in digital processing of one dimensional and two dimensional biomedical signals based on Spline methods.

NETWORK OF QUANTUM HARMONIC OSCILLATORS

Matrasulov D. M., Yusupov J. R.

Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan, j.yusupov@polito.uz

Quantum particle dynamics in networks is of importance for broad variety of problems in condensed matter physics, polymers, optics and biophysics. In case of submicron scales wave dynamics in networks can be described in terms of so-called quantum graphs. The latter is a set of bonds connected to each other at the vertices according to a rule which is called topology of a graph. Recently quantum graphs has attracted much attention in the context of microwave optical fibers [1], quantum hall effect [2], condensed matter physics [1,3] and quantum chaos theory [4,5]. Quantum mechanical description of particle transport in networks dates back to the Refs.[6,7] which consider electron motion in organic molecules. Later the Ref.[8] considered transport in quantum wire networks according to Kirchhoff rules. However, strict mathematical formulation was presented by Kostykin and Schrader in [9]. Formulation of the wave equations on metric graphs requires imposing the boundary conditions at the graph vertices that provide "gluing" of graph bonds the vertices. The main constraint for such conditions is the self-adjointness of the problem, i.e. boundary conditions should keep self-adjointness of the Schrödinger equation on a graph. General conditions providing such constraint were presented in [10]. In this work we address the problem of a network of quantum harmonic oscillators by solving the stationary Schrödinger equation on metric graphs in the presence of harmonic oscillator potential with bond-dependent frequency. Network of quantum harmonic oscillators can be used for modeling of vibrations in discrete or branched systems, such as crystal lattices, molecular chains, polymers, etc. Our approach for the study of quantum harmonic oscillator network is based on considering it as a set of confined harmonic oscillators connected at vertices. Confined, or bounded harmonic oscillator presents parabolic potential given at finite interval. Quantum mechanical bounded oscillator was studied earlier in detail in Refs.[11,12].

In this work we study quantum particle dynamics in a network of harmonic oscillators by considering the simplest case, three harmonic oscillators on a metric star graph with three bonds. In the absence of external time-dependent forces, such system can be described by the stationary Schrödinger equation on metric graphs that includes harmonic oscillator potential. In order to solve Schrödinger equation on a network of harmonic oscillators we impose vertex boundary conditions providing continuity of the wave function and Kirchhoff rule at the vertex. Such boundary conditions lead to spectral equations in the form of transcendental algebraic equation. By solving this equation we find corresponding eigenfunctions and eigenvalues. Using such eigenfunctions and eigenvalues we analyze particle transport in it by considering wave packet dynamics and also different properties of the system.

References

1. **Exner P., Kovarik H.** *Quantum waveguides*. Springer, 2015.
2. **Goldman N., Gaspard P.** *Quantum graphs and the integer quantum Hall effect*. Phys. Rev. B, 2008, 77, 024302.
3. **Alexander S.** *Superconductivity of networks. A percolation approach to the effects of disorder*. Phys. Rev. B, 1985, 27, 1541.
4. **Kottos T., Smilansky U.** *Periodic orbit theory and spectral statistics for quantum graphs*. Ann. Phys., 1999, 274, 76.
5. **Gnutzmann S., Smilansky U.** *Quantum graphs: Applications to quantum chaos and universal spectral statistics*. Adv. Phys., 2006, 55, 527.
6. **Pauling L.** *The Diamagnetic Anisotropy of Aromatic Molecules*. J. Chem. Phys., 1936, 4, 673.
7. **Ruedenberg K., Scherr C. W.** *Free-Electron Network Model for Conjugated Systems. I. Theory*. J. Chem. Phys., 1953, 21, 1565.
8. **Exner P., Seba P.** *Free quantum motion on a branching graph*. Rep. Math. Phys., 1989, 28, 7.
9. **Kostrykin R., Schrader R.** *Kirchhoff's Rule for Quantum Wires*. J. Phys. A: Math. Gen., 1999, 32, 595.
10. **Gnutzmann S., Keating J. P., Piotet F.** *Eigenfunction Statistics on Quantum Graphs*. Ann. Phys., 2010, 325, 2595.
11. **Stevanoviyc L., Sen K. D.** *Eigenspectrum properties of the confined 3D harmonic oscillator*. J. Phys. B: At.Mol., 2008, 41, 225002.
12. **Amore P., Fernandez F. M.** *One-dimensional oscillator in a box*. Eur. J. Phys., 2010, 31, 69.

**ESTIMATES AND ASYMPTOTIC SOLUTIONS FOR A NONLINEAR
PARABOLIC SYSTEM NOT IN DIVERGENCE FORM WITH VARIABLE
DENSITY**

Matyakubov A.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, almasa@list.ru

In this talk we consider the following Cauchy problem to a nonlinear parabolic system not in divergence form:

$$|x|^s \frac{\partial u_i}{\partial t} = u_{3-i}^{m_i} \nabla \left(|\nabla u_i^k|^{p-2} \nabla u_i^n \right), \quad t > 0, \quad x \in R^N, \quad (1)$$

$$u_i|_{t=0} = u_{i0}(x), \quad x \in R^N, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

where p, m_1, m_2, k, n, s - are constants, $N \geq 1$.

This system can be used to describe the development of multiple groups in the dynamics of biological groups, where u, v are the densities of the different groups (see [1], and references therein). In paper [1], Gao et al. considered parabolic systems not in divergence form in the case $n = 1, s = 0$ and $p = 2$, with source and null Dirichlet boundary conditions. The local existence and uniqueness of classical solution were proved. It's constructed the Zeldovich-Barenblatt type solution.

In this paper, an asymptotic behavior of self-similar solutions in the slow and fast diffusion cases are established. The condition of global solvability of the Cauchy problem, depending on value of the numerical parameters and an initial value are proved.

We introduce the notations:

$$h_i = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i(k(p-2) + n - 1) - \alpha_{3-i}m_i}, \quad \gamma_i = \frac{(p-1)(k(p-2) + n - 1 - m_i)}{(k(p-2) + n - 1)^2 - m_1m_2},$$

$$\alpha_i = \frac{\beta_i(1 + \beta_{3-i}(k(p-2) + n - 1 - m_i))}{(1 + \beta_1(k(p-2) + n - 1))(1 + \beta_2(k(p-2) + n - 1)) - m_1m_2\beta_1\beta_2},$$

$$\beta_i = \frac{N+s}{p+s} \frac{\gamma_i}{\gamma_i - m_i\gamma_{3-i}}, \quad i = 1, 2.$$

Let have the equality

$$\alpha_1(k(p-2) + n - 1) + \alpha_2m_1 = \alpha_2(k(p-2) + n - 1) + \alpha_1m_2.$$

We restrict only the following theorem:

Theorem. *Let $k(p-2) + n > m + 1$, $m = \max\{m_1, m_2\}$, $\gamma_i > m_i\gamma_{3-i}$, $-\frac{N+s}{p+s} \frac{\gamma_i}{\gamma_i - m_i\gamma_{3-i}} + h_i \leq 0$, $u_{i0}(x) \leq u_{i+}(0, x)$, $i = 1, 2$, $x \in R^N$. Then*

the problem (1)-(2) has a global solution with estimate $u_i(t, x) \leq u_{i+}(t, x)$, where $u_{i+}(t, x) = A_i(T+t)^{-\alpha_i} \left(a - \frac{h_i^{-\frac{1}{p-1}} \alpha_i^{\frac{1}{p-1}} |x|^{\frac{p+s}{p-1}}}{(T+t)^{\frac{1-\alpha_i(k(p-2)+n-1)-\alpha_{3-i}m_i}{p-1}}} \right)^{\gamma_i}$, $A_i^{k(p-2)+n-1} A_{3-i}^{m_i} = \frac{p-1}{(p+s)^2 n(\gamma_i - m_i \gamma_{3-i})} \left| \frac{p-1}{(p+s)k\gamma_i} \right|^{p-2}$, $i = 1, 2$, $(b)_+ = \max(0, b)$.

References

1. **Gao, Y., Meng, Q., Guo, Y.** *Study of properties of solutions for quasilinear parabolic systems.* MATEC Web of Conferences, 2016, Vol. 61, No.1, pp.1-4.

ABOUT COMMON SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION SECOND ORDER WITH INVOLUTION

Muminov G. M. Xasanova M. M.

Andijan State University, Andijan, Uzbekistan

In the papers [1,2] is constructed the Green’s function of the second order differential equation with involution

$$-u''(-x) - \lambda u(x) = f(x) \tag{1}$$

and studied the boundary condition problems of Dirichlet and Neumann type, where λ is positive number, $f(x)$ – continuous function. In both papers is absent common solution of the equation (1). We found a common solution of the equation (1) which has form:

$$u(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} x + g(x, t, \lambda), \tag{2}$$

where

$$g(x, t, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^{-x} \left[\cos \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} t + \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} x \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} t \right] f(t) dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-x}^{-1} \left[-\sin \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} t - \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} x \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} t \right] f(t) dt + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_x^1 \left[-\cos \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} t - \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} x \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} t \right] f(t) dt.$$

By using (2) we found the solution of the boundary value problem Dirichlet and Neumann type

$$-u''(-x) - \lambda u(x) = f(x), u(-1) = u(1) = 0$$

$$-u''(-x) - \lambda u(x) = f(x), u'(-1) = u'(1) = 0$$

which are

$$u(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 \cos\sqrt{\lambda}t f(t) + \frac{ch\sqrt{\lambda}sh\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}sh\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 sh\sqrt{\lambda}t f(t) + g(x, t, \lambda)$$

and

$$u(x) = \frac{\cos\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 \cos\sqrt{\lambda}t f(t) + \frac{sh\sqrt{\lambda}sh\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}ch\sqrt{\lambda}} \int_{-1}^1 sh\sqrt{\lambda}t f(t) + g(x, t, \lambda)$$

respectively. These solutions is absent in [1,2].

References

1. **Sarsenbi A. M.** *The theorem on the basis property of eigenfunctions of second order differential operators with involution.* AIPConference Proceedings, 2016, 1759,020030;(Doi: 10.1063/1.4959644).
2. **Sarsenbi A. M., Sarsenbi A. A.** AIP Conference Proceedings, 2014, 1611, 231-233, 020074 (DOI:10.1063/1,4930500)

REAL ANALOGUE OF GE-KADISON'S SPLITTING THEOREM

Nurillaev M. E.¹, Rakhimov A. A.²

¹*Tashkent Institute of Textile and Light Industry, Tashkent, Uzbekistan,*

nurillaev_muzaffar@mail.ru

²*Tashkent Institute of Design, Construction and Maintenance of Automobile Roads, Tashkent,*

Uzbekistan, rakhimov@ktu.edu.tr

Let H be a complex Hilbert space and $B(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on H . A complex *-subalgebra $M \subset B(H)$ with the identity $\mathbf{1}$ is called a W^* -algebra, if it is weakly closed. A real *-subalgebra $R \subset B(H)$ with $\mathbf{1}$ is called a *real W^* -algebra*, if it is weakly closed and $R \cap iR = \{0\}$ (see [1]). In this paper we prove the real analogue Ge-Kadison's splitting theorem for finite case (see [2-4]).

Let's formulate auxiliary results.

Lemma 1. *Let R be a real W^* -algebra and F, Q be a real W^* -subalgebras of R , such that $F \subset Q$. If E is a conditional expectation from R onto Q (i.e. it is positive, linear mapping*

with $E(abc) = aE(b)c$, for all $b \in R$, $a, c \in Q$), then E induces a conditional expectation from $F' \cap R$ onto $F' \cap Q$.

Lemma 2. Let F_i ($i = 1, 2$) be a real W^* -algebra, acting on a complex Hilbert space H_i and let S_i be a real W^* -subalgebra of F_i . Let F be a real W^* -algebra such that $S_1 \overline{\otimes} S_2 \subset F \subset F_1 \overline{\otimes} F_2$. If there is a conditional expectation $E : F_1 \overline{\otimes} F_2 \rightarrow F$, then E induces a conditional expectation from $(S'_1 \cap F_1) \overline{\otimes} F_2$ onto $(S'_1 \cap F_1) \overline{\otimes} F_2 \cap F$.

Lemma 3. Assume the conditions of Lemma 2 and $S'_1 \cap F_1 = \mathbb{R}\mathbf{1}$. Let $L_2 := \{x \in F_2 : \mathbf{1} \otimes x \in F\}$. Then E induces a conditional expectation from F_2 onto L_2 .

Using Lemma's 1-3 can be proved the real analogue of Ge-Kadison's splitting theorem for finite real W^* -algebras.

Theorem. If R_1 is a finite real factor and R_2 is a finite real W^* -algebra, and R is a real W^* -subalgebra of $R_1 \overline{\otimes} R_2$ which contains $R_1 \overline{\otimes} \mathbb{R}\mathbf{1}$, then $R = R_1 \overline{\otimes} Q_2$ for some Q_2 , a real W^* -subalgebra of R_2 .

References

1. **Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A., Usmanov Sh. M.** *Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras*. Netherlands, Kluwer Academic Publishers, MAIA, 1997, Vol. 418, 235p.
2. **Kadison R** *Problems on von Neumann algebras*, in: Baton Rouge Conference, unpublished.
3. **Popa S.** *Maximal injective subalgebras in factors associated with free groups*. Adv. Math., 1983, Vol. 50, 27-48pp.
4. **Fang J.** *On maximal injective subalgebras of tensor products of von Neumann algebras*. Journal of Functional Analysis, 2007, Vol. 244, 277-288pp.

ON THE HOMOGENEOUS SOLONNIKOV-FASANO PROBLEM IN A NON-CYLINDRICAL DOMAIN

Orumbayeva N. T.^{1,3}, Jenaliyev M. T.², Iskakov S. A.³

¹*Institute of applied mathematics, Karaganda, Kazakhstan, orumbayevan@mail.ru*

²*Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan,
muvasharkhan@gmail.com*

³*Buketov Karaganda State University, Kazakhstan, isagyndyk@mail.ru*

Let be $G = \{(x, t) : 0 < x < t^\omega, 0 < t < +\infty\}$. A homogeneous boundary value problem is solved:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \{x, t\} \in G, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, & \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=t^\omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $\tilde{u}(t) = u(t^\omega, t)$, $\omega > 1/2$.

This kind of boundary value problem (1) arises in the study of the Stefan problem [1].

Using the thermal potentials of a double and a simple layer:

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \nu(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(x-\tau^\omega)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \varphi(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

we reduce the problem (1) to solving the pseudo-volterra integral equation:

$$\varphi(t) + \int_0^t K_\omega(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad (2)$$

where the kernel $K_\omega(t, \tau)$ has the property $\lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^t K_\omega(t, \tau) d\tau = 1$.

Singular integral equations of this kind are investigated in [2]-[4].

Theorem 1. *When $\omega > 1/2$ integral equation (2) has the nonzero solution $C \cdot \varphi_0(t)$, $C = \text{const}$, and $t^{\frac{3}{2}-\omega} \cdot \varphi(t) \in L_\infty(0, \infty)$.*

Let be $G_T = \{x, t : 0 < x < t^\omega, 0 < t < T < +\infty\}$ and using weighting functions:

$$\theta(x, t) = \begin{cases} \left(x + t^{\frac{3}{2}-\omega}\right)^{-1}, & \{x, t\} \in G_T, \\ \exp\left\{-\frac{2x + t^\omega}{4a^2}\right\}, & \{x, t\} \in G \setminus G_T, \end{cases}$$

$$\theta_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} \left(x^{1+\alpha} + t^{\frac{3}{2}-\omega+\frac{\alpha}{2}}\right)^{-1}, & \{x, t\} \in G_T, \\ \exp\left\{-\frac{2x + t^\omega}{4a^2} + \varepsilon \cdot \frac{2x + t^\omega}{4a^2}\right\}, & \{x, t\} \in G \setminus G_T, \end{cases}$$

$\alpha > 0, \varepsilon > 0$, we introduce the following functional classes:

$$L_\infty(G, \theta(x, t)), \quad L_\infty(G, \theta_\varepsilon(x, t)).$$

Theorem 2. *Boundary value problem (1) along with the trivial solution, has a nontrivial solution $u(x, t) = C \cdot u_0(x, t)$, where $u_0(x, t) \in L_\infty(G, \theta(x, t))$ and $C = \text{const}$.*

Theorem 3. *In the class of functions $L_\infty(G, \theta_\varepsilon(x, t))$ boundary value problem (1) has only the trivial solution $u(x, t) = 0$.*

This publication is supported by the grant project 1164 / GF 4 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

References

1. **Solonnikov V. A., Fasano A.** *One-dimensional parabolic problem arising in the study of some free boundary problems* (in Russian). Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, 2000, 269, 322–338.
2. **Amangaliyeva M. M., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I.** *About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain*. Boundary Value Problems, 2014, 213, 1-21.
3. **Amangaliyeva M. M., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I.** *On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain*. Siberian Mathematical Journal, 2015, 56 (6), 1234-1248.
4. **Jenaliyev M. T., Amangaliyeva M. M., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I.** *On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel*. Advances in Difference Equations, 2015, 71, 1-14.

TECHNOLOGY TRANSFER INSIGHTS IN ACADEMIC RESEARCH AND PERSONALIZED MEDICINE

Pinhasov A.

Ariel University, Ariel, Israel, albertpi@ariel.ac.il

The genomic era led to the development of personalized medicine, which was originally based on genomic approaches, but gradually become multidisciplinary encompassing different fields of science including mathematics, physics and engineering. This led to the generation of large amounts of scientific data without an organized means of interpretation and distribution. In this regard, vast data availability necessitates proper and comprehensive transfer of this knowledge to the scientific and medical community. Technology transfer (TT) is process of transferring scientific findings for the purpose of further development and commercialization. In this respect, TT is found to increase academic research activities, whereas in personalized medicine, application of technologies effects individualized treatment approaches. Thus, technology transfer development along with scientific and academic research represents a core for the progress and sustainability of personalized medicine and is an essential tool for translational research and development.

INORGANIC NANOTUBES OF MoS_2 AND WS_2 : THEIR SYNTHESIS, PROPERTIES AND APPLICATIONS

Pallelappa Ch.¹, Grinberg O.¹, Biro R. P.², Bruiser V.³, Zussman E.⁴, Livneh T.⁵, Zak A.¹

¹*Faculty of Sciences, Holon Institute of Technology, Holon, Israel*

²*Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel*

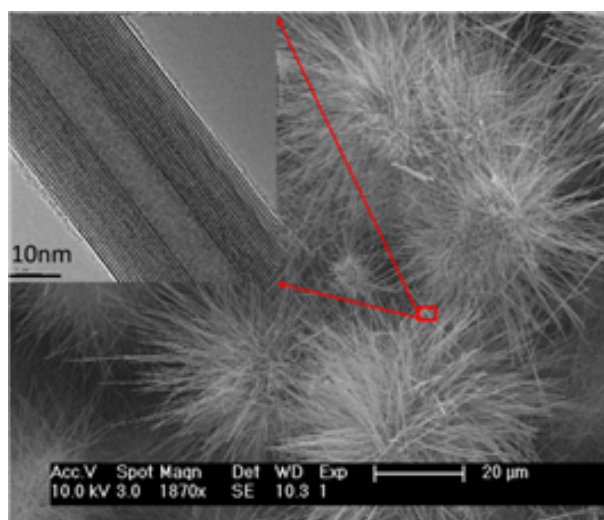
³*Leibniz Institute for Plasma Science and Technology (INP Greifswald), Greifswald, Germany*

⁴*Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, Israel*

⁵*Department of Physics, Nuclear Research Center of Negev, Israel*

The discovery of inorganic nanotubes (INT) of layered transition metal dichalcogenides (MoS_2 and WS_2) more than two decades ago opened the new research field in a solid state chemistry and in nanomaterials science. However, wide investigation of their properties and applications require the preparation of pure phase powders and in significant amounts.

Careful study of the growth mechanism of WS_2 multiwall nanotubes (MWINT) resulted in pure phase INTs production and suggested their simple scaling up. The obtained nanotubes



are of 30-170 nm in diameter and 5-25 micron in length, of perfect crystallinity and needle-like morphology.

In addition, we have demonstrated that single- to triple-wall WS_2 nanotubes (SWINT), of 3-7 nm in diameter and 20-200 nm in length, can be produced by high-power plasma irradiation of big multiwall WS_2 nanotubes. Being of single to few-layers wall width these nanotubes promise to be of unusual electro-optical characteristics, which are under study nowadays.

Very similar in their properties, the MoS_2 and WS_2 compounds demonstrate significantly different behavior during their synthesis from corresponding oxides through gas-phase high temperature reaction. Instability of precursor MoO_x against reduction in high temperature processes makes INT- MoS_2 production very challenging and become an obstacle in the way of their reproducible preparation during these years. Finally, we can report on the reproducible, catalyst free and aspect ratio controlled synthesis of MoS_2 inorganic nanotubes (INT) from molybdenum oxide. The obtained nanotubes are of 10-20nm, 40-80 nm or 100-300 nm in diameter and lengths - up to tens of microns, depends on reaction parameters. INT of MoS_2 are both 40% lighter and 40% stronger compared to the analogous WS_2 nanoparticles and hence more beneficial for tribological and composite applications. Being semiconductors, both MoS_2 and WS_2 nanotubes are good candidates for photovoltaics and optoelectronics.

**REDUCTIONAL METHOD IN PERTURBATION THEORY OF
GENERALIZED SPECTRAL E. SCHMIDT PROBLEM**

Rakhimov D. G.

*Branch of the Moscow State University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan,
davranaka@yandex.com.*

Let E_1, E_2 be Banach spaces $E_1 \subset E_2 \subset H$ with dense embeddings, H be a Hilbert space and $B \in L(E_1, E_2)$ be closed linear operator. Let $\lambda_0 \in R$ - be n -multiple Fredholmian point of the following E. Schmidt unperturbed spectral problem, analytically dependent on E. Schmidt spectral parameter $\lambda \in R$, with relevant E. Schmidt eigenelements $(\varphi_{i0} \ \psi_{i0})^T$

$$B\varphi_{i0} = A(\lambda_0)\psi_{i0} \quad (1)$$

$$B^*\psi_{i0} = A^*(\lambda_0)\varphi_{i0} \quad (2)$$

Here it is considered the following perturbed E.Schmidt's spectral problem:

$$B\varphi = A(\lambda, \varepsilon)\psi, \quad (3)$$

$$B^*\psi = A^*(\lambda, \varepsilon)\varphi, \quad (4)$$

where $\mu = \lambda - \lambda_0$, $\varepsilon \in R$, $|\varepsilon| < \rho_0$ -small parameter, and $A(\lambda, \varepsilon)\psi = \sum_{i+j \geq 0} A_{ij}\mu^i \varepsilon^j \psi$.

Let λ_0 be n -multiple Fredholm point of E. Schmidt's spectrum of the operator-function $(\mathcal{B} - \mathcal{A}(\lambda_0, 0))$, with the zero-subspace $N(\mathcal{B} - \mathcal{A}(\lambda_0, 0)) = span\{\Phi_k\} = span\{(\varphi_{k0}, \psi_{k0})^T\}_1^n$, and the defect subspace $N^*(\mathcal{B} - \mathcal{A}(\lambda_0, 0)) = span\{\Psi_{k0}\}_1^n = span\{(\bar{\varphi}_{k0}, \bar{\psi}_{k0})^T\}_1^n$.

Relatively to the zeros $\Phi_{i0}^{(1)} = (\varphi_{i0} \ \psi_{i0})^T$ of the direct Schmidt eigenvalue problem (1), so the zeros $\Psi_{i0}^{(1)} = (\tilde{\varphi}_{i0} \ \tilde{\psi}_{i0})^T$ of the conjugate problem it is supposed that there exist the biorthogonal systems $\Gamma_{k0} = (\gamma_{k0}^{(1)} \ z_{k0}^{(1)})^T \in \mathcal{H}$ and $Z_{s0} = (\tilde{z}_{s0}^{(1)} \ \tilde{\gamma}_{s0}^{(1)})^T \in \mathcal{H}$, i.e.

$$\ll \Phi_{i0}^{(1)}, \Gamma_{k0} \gg = \delta_{ik}, \quad \ll Z_{s0}, \Psi_{j0} \gg = \delta_{sj}.$$

Introduce also the Schmidt operator

$$\Gamma = [\mathcal{B} - \tilde{\mathcal{A}}(\lambda_0, 0)]^{-1} = \left[\mathcal{B} - \mathcal{A}(\lambda_0, 0) + \sum_{k=1}^n \ll \cdot, \Gamma_{k0} \gg Z_{k0} \right]^{-1}.$$

This means the fulfilment of the following relations

$$(\mathcal{B} - \mathcal{A}(\lambda_0, 0))\Phi_i^{(s)} = \sum_{j=1}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & A_{j0} \\ A_{j0}^* & 0 \end{pmatrix} \Phi_i^{(s-j)},$$

$$(\mathcal{B}^* - \mathcal{A}^*(\lambda_0, 0))\Psi_i^{(s)} = \sum_{j=1}^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & A_{j0} \\ A_{j0}^* & 0 \end{pmatrix} \Psi_i^{(s-j)},$$

where $s = \overline{2, p_i}, i = \overline{1, n}$, moreover $\ll \sum_{j=1}^{p_i} \begin{pmatrix} 0 & A_{j0} \\ A_{j0}^* & 0 \end{pmatrix} \Phi_i^{(p_i+1-j)}, \Psi_k^{(1)} \gg \neq 0$ at least for of one $k \in \{1, n\}$ and $\ll \Phi_l^{(1)}, \sum_{j=1}^{p_i} \begin{pmatrix} 0 & A_{j0} \\ A_{j0}^* & 0 \end{pmatrix} \Psi_i^{(p_i+1-j)} \gg \neq 0$ at least for of one $l \in \{1, n\}$.

According to reductional method for the resolving of our problem (2) for every $i = \overline{1, n}$ the regularizators

$$\overline{[\mathcal{B} - \mathcal{A}(\lambda, \varepsilon)]} = \mathcal{B} - \mathcal{A}(\lambda, \varepsilon) + \sum_{i \neq j} \ll \cdot, \Gamma_{j0} \gg \mathcal{Z}_{j0} \quad (1)$$

are introduced. For these regularuzators the following result is true [1,2].

Theorem 1. *Let the DR condition be satisfied. Then a eigenvalues $\lambda_i(\varepsilon)$ of the problem (3),(4) with relevant eigen- $\Phi_i(\varepsilon) = (\varphi(\varepsilon) \psi_i(\varepsilon))^T$, and defect-elements $\Psi_i(\varepsilon) = (\tilde{\psi}(\varepsilon) \tilde{\varphi}_i(\varepsilon))^T$, are the simple eigenvalues of the regularized operators (5) with corresponding eigenelement and defect functional of the form*

$$\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \Phi_i(\varepsilon) + \sum_{s \neq i} c_{is} \Phi_s(\varepsilon), \quad \tilde{\Psi}_i(\varepsilon) = \Psi_i(\varepsilon) + \sum_{s \neq i} c_{is} \Psi_s(\varepsilon).$$

Theorem 2. *If $\dim N(\mathcal{B} - \mathcal{A}(\lambda_0, 0)) = \dim N(\mathcal{B}^* - \mathcal{A}^*(\lambda_0, 0)) = n$ and $\ll \mathcal{A}_{10} \Phi_{i0}, \Psi_{i0} \gg \neq 0, i = \overline{1, n}$, fot all $i = \overline{1, n}$, then for suffiriently small ε there exist exactly n geometrically simple eigenvalues $\lambda_i(\varepsilon), \lambda_i(0) = \lambda_0$, with corresponding eigenelements $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ and defect functionals $\tilde{\Psi}_i(\varepsilon)$ analytically dependent on ε .*

Theorem 3. *Let at the GJChs presence $\ll \sum_{k=1}^{p_i} \mathcal{A}_k \Phi_{i0}^{(p_i+1-k)}, \Psi_{i0} \gg \neq 0$, for all, $i = \overline{1, n}$. If $L_{0j} = 0, j = \overline{1, \infty}$ and $L_{11} \neq 0$ then there exist K simple eigenvalues with relevant to them eigenelements presenting in the form of series by $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. If $L_{0j} = 0, j = \overline{1, q_i-1}, L_{0q_i} \neq 0, L_{11} \neq 0$ then there exist exactly K eigenvalues n of which with the relevant eigenelements representary by integer degrees of ε , according to the first nonzero coefficient from the sequence $\{L_{1j}\}$.*

References

1. **Rakhimov D. G.** *On the perturbations of Fredholm eigenvalues of linear operators.* Middle Volga Mathematical Society Journal (MVS Journal), 2015, vol. 17. No 3, pp. 37-43.
2. **Rakhimov D. G.** *On the perturbations of Fredholm eigenvalues of linear operators.* Journal of Differential Equations. Minsk, 2017, Vol. 53, No 5, pp.615-623.

QUANTUM DYNAMICS OF ATOM CONFINED TIME-DEPENDENT TRAP

Rakhmanov S.¹, Matrasulov D.², Matveev V.³

¹*Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan, saparboy92@gmail.com*

²*Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan, dmatrasulov@gmail.com*

³*Federal Center for Integrated Arctic Research, Ural Branch, Russian Academy of Sciences, Arkhangelsk, Russia, vim1598@gmail.com*

Atoms and molecules confined nanoscale domains have physical properties which are completely different than those of free atoms. Such difference is caused by the modification of boundary conditions imposed for quantum mechanical wave equations (e.g., Schrödinger, Dirac equations) as well as by high pressure induced by the domain boundaries. For free atoms the boundary conditions are imposed in whole space, while for confined atoms one should solve the wave equations with the boundary conditions imposed in finite domain. Due to such modification, properties of the atoms, molecules and matter depend on the shape and size of a confining domain. Spatially confined atoms and molecules appear in many branches of physics, such as ultracold atoms, BEC, atom optic billiards, metallic hydrogen and different topics of nanoscale physics. Moreover, such practically important problems as atom cooling in nanoscale optical traps [1], fabrication of low dimensional nanomaterials [2], manipulation by atoms in optical billiards [3] and creation of a matter under high pressure [4,5,6,7,8,9] deal with the problem of confined atoms and molecules. A key issue in the study of such systems is the reaction of the electronic structure of an atom on the confining potential [5]. A convenient model for the study of atoms under spatial confinement is the atom-in-box system. Pioneering studies of atom in a box with impenetrable walls date back to the Ref. [9,10], where effect of the pressure on an atom was explored. Later the problem was studied within the quantum mechanical approach in different contexts (see, e.g., [9-19]).

Experimentally, atom-in-box system can be realized in co-called atom optic billiards which represent a rapidly scanning and tightly focused laser beam creating a time-averaged quasi-

static potential for atoms [20-24] . By controlling the deflection angles of the laser beam, one can create various box (billiard) shapes.

Usually, the studies of atom optic billiards are mainly focused on the dynamics of atom and cooling problem without taking into account the effect of the electronic structure of an atom to the confining force. However, the response of the electronic structure of atom to the shape and geometry of the confinement boundaries plays important role in atom cooling, highly compressed matter and fabrication of nanoscale devices using confined atoms. We note that most of the studies on atom-in-box system available in the literature, deal with the static box walls. However, in many cases, including atom optic billiards [20,21] and metallic hydrogen formation [7,8] the boundary of the confinement may fluctuate, or can be time-varying. In this case the dynamics of atomic electron is completely different than that for fixed boundaries.

In this paper we study quantum dynamics of one electron atom confined in a spherical box with time dependent radius by focusing on the response of atomic electron to the effect of moving walls of the box. The time-dependence of the wall's position is considered as non-adiabatic, i.e. we consider the cases of rapidly shrinking, expanding and breathing boxes.

In this work we study quantum dynamics of one-electron atom confined in a spherical impenetrable box with time-dependent radius. The behavior of the atomic electron interacting with the moving walls of the box is analyzed by computing average total energy, average force and pressure. Linearly extending, contracting and harmonically breathing boxes are considered in the non-adiabatic regime i.e. when the wall of the box moves with high velocities. It is shown that linearly extending box leads to de-excitation of the atom, while the rapidly contracting box causes the creation of very high pressure on the atom and transition of the atomic electron into the unbound state. In harmonically breathing box diffusive excitation of atomic electron may occur in analogy with that for atom in a microwave field.

References

1. **Gardiner C., Zoeller P.** *The Quantum World of Ultra-Cold Atoms and Light Book II: The Physics of Quantum-Optical Devices.* World Scientific, 2015.
2. **Tsurumi T., Hirayama H., Vacha M., Taniyama T.** *Nanoscale Physics for Materials Science.* CRC Press, 2009.
3. **Meystre P.** *Atom Optics.* Springer, 2001.
4. **Sabin J., Brandas E.** *Theory of Confined Quantum Systems-Part One.* Advances in Quantum Chemistry Academic, 2009, 57.
5. **Sen K.** *Electronic Structure of Quantum Confined Atoms and Molecules.* Springer, 2014.
6. **Blank V., Estrin E.** *Phase Transitions in Solids Under High Pressure.* CRC Press, 2013.

7. **McMahon J., Morales M., Pierleoni C., Ceperley D.** *The properties of hydrogen and helium under extreme conditions.* Rev.Mod.Phys., 2012, 84, 1607.
8. **Chen Ji, Li Xin-Zheng, Zhang Qianfang.** *Quantum simulation of low-temperature metallic liquid hydrogen.* Nature Commun., 2013, 4, 2064.
9. **Michels A., Boer J., Bijl A.** *Remarks concerning molecular interaction and their influence on the polarisability.* Physica (The Hague), 1937, 4, 981.
10. **Sommerfeld A., Welker H.** *Künstliche Grenzbedingungen beim Keplerproblem.* Ann. Phys., 1938, 32, 56.
11. **Last I., George Th.** *Light absorption by an atom moving inside a spherical box.* Chem. Phys. Lett., 1987, 142, 19.
12. **Kang Sh., Yang Y-Ch., He J., Xiong F-Q., Xu N.** *The hydrogen atom confined in both Debye screening potential and impenetrable spherical box.* Cent. Eur. J. Phys., 2013, 11, 584.
13. **Zhou Sh-G., Zhao J., E-G.** *A spherical-box approach for resonances in the presence of the Coulomb interaction.* J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., 2009, 42, 245001.
14. **Burrows B., Cohen M.** *Exact solutions for perturbed confined hydrogen atoms: Polarizabilities and nuclear shielding factors.* Phys. Rev. A, 2005, 72, 032508.
15. **Kang S., Liu Q., Meng H-Y., Shi T-Y.** *Hydrogen atom in ellipsoidal cavity.* Phys. Lett. A, 2007, 360, 608.
16. **Maovic D.** *Unusually kicked dynamics: Hydrogen atom in a spherical box.* Cent. Eur. J. Phys., 2012, 10, 768.
17. **Lumb S., Lumb S., Prasad V.** *Laser-induced excitation and ionization of a confined hydrogen atom in an exponential-cosine-screened Coulomb potential.* Phys. Rev. A, 2014, 90, 032505.
18. **Ley-Koo E., Rubinstein S.** *The hydrogen atom within spherical boxes with penetrable walls.* J. Chem. Phys., 1979, 71, 351.
19. **Capitelli M.** *Energy levels of atomic hydrogen in a closed box: A natural cutoff criterion of the electronic partition function.* Phys. Rev. A, 2009, 80, 032113.
20. **Milner V., Hanssen J., Campbell W., Raizen M.** *Optical billiards for atoms.* Phys.Rev.Lett., 2001, 86, 8.
21. **Kaplan A., Friedman N., Andersen M., Davidson N.** *Observation of islands of stability in soft wall atom-optics billiards.* Phys.Rev.Lett., 2001, 87, 27.

22. **Andersen M., Kaplan A., Friedman N., Davidson N.** *Stable islands in chaotic atom-optics billiards, caused by curved trajectories.* J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., 2002, 35, 2183.
23. **Rohwedder B.** *Quantum billiard atom optics.* EPL, 2002, 60, 505.
24. **Montangero S., Frustaglia D., Calarco T., Fazio R.** *Quantum billiards in optical lattices.* EPL, 2009, 88, 30006.

NUMERICAL INVESTIGATION OF A FOURTH-ORDER EQUATION FROM THIN FILM FLOW

Rakhmonov Z. R., Tillaev A. I.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, zraxmonov@inbox.ru

In this thesis, we study the asymptotic of the self-similar solution of the fourth-order thin film equation in one dimension

$$u_t = -(|u|^m u_{xxx})_x, \quad x \in R, \quad t > 0, \quad (1)$$

where $m > 0$.

Equation (1) arises in some physical models such as thin film, lubrication theory, and in several other hydrodynamic-type problems (see [1]).

In recent years, many authors have studied the global in time similarity solutions and the first mass-preserving self-similar solutions (with zero contact angles) that blow-up in finite time to Cauchy problem for (1) [2-4].

In the paper, using the asymptotic of the following global in time self-similar solution

$$u_s = t^{-\frac{1}{4+m}} f(\varphi), \quad \varphi = xt^{-\frac{1}{4+m}}, \quad (2)$$

we will construct numerically solution for (1). On substitution of (2) into (1) one obtains a divergent fourth-order ordinary differential equation

$$-(|f|^m f''')' + \frac{1}{4+m} (\varphi f' + f) = 0. \quad (3)$$

On the basis of qualitative studies of an asymptotic of solution of (3) numerical calculations have been carried out. It was constructed the iterative process for numerical modeling, in the inner steps of iteration the node values are calculated by the Thomas algorithm. Results of

numerical experiments show the quick convergence of the iterative process at the expense of the successful choice the initial approximation.

References

1. **Bebernes J., Eberly D.** *Mathematical Problems in Combustion Theory*. Appl. Math. Sci., Vol. 83, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
2. **Alvarez-Caudevilla P., Galaktionov V. A.** *Branching analysis of a countable family of global similarity solutions of a fourth-order thin film equation*. arXiv:0911.2996v1 [math.AP] 16 Nov 2009.
3. **Fischer J.** *Optimal lower bounds on asymptotic support propagation rates for the thin-film equation*. J. Differential Equations, 255 (10), 2013, 3127-3149.
4. **Galaktionov V. A.** *Very Singular Solutions for Thin Film Equations with Absorption*. Studies in Applied Mathematics. Vol. 124, Issue 1, pages 39-63, 2010.

TO SOLVING THE SINGULAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATION

Ramazanov M. I.^{1,3}, Jenaliyev M. T.², Kosmakova M. T.³

¹*Institute of applied mathematics, Karaganda, Kazakhstan, ramamur@mail.ru*

²*Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan, muvasharkhan@gmail.com*

³*Buketov Karaganda state university, Karaganda, Kazakhstan, svetik_mir69@mail.ru*

In the study of the boundary value problem of heat conduction:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in G = \{(x, t) : 0 < x < +\infty, t > 0\}; \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=t} + \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} \Big|_{x=t} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where $\tilde{u}(t) = u(t, t)$, whose solution is useful in the study of certain problems with free boundaries [1], there arises the need to solve the singular Volterra integral equation:

$$\varphi(t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \sqrt{\frac{t}{\tau}} \frac{t + \tau}{(t - \tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ -\frac{(t + \tau)^2}{4a^2(t - \tau)} \right\} \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot \varphi(\tau) d\tau + \frac{3}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{t-\tau}{4a^2} \right\} \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot \varphi(\tau) d\tau - \frac{2}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot \varphi(\tau) d\tau = f(t). \quad (2)$$

The corresponding homogeneous integral equation was investigated In [2], where it was shown that it has a nonzero solution. The aim of this paper is to solve the nonhomogeneous integral equation (2), i.e. the construction of the resolvent for this equation.

We seek the solution of the integral equation (2) in the class of functions:

$$\begin{aligned} \sqrt{t} \cdot \exp \left\{ \frac{t}{4a^2} \right\} \cdot \varphi(t) &\in L_{\infty}(G), \\ \sqrt{t} \cdot \exp \left\{ \frac{t}{4a^2} \right\} \cdot f(t) &\in L_{\infty}(G). \end{aligned} \quad (1)$$

The Volterra integral equations of this kind have been studied in [3-5].

Theorem. *Integral equation (2) for all*

$$\sqrt{t} \cdot f(t) \in L_{\infty}(0, \infty)$$

has a general solution $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t R(t, \tau) f(\tau) d\tau + C \cdot \varphi_0(t),$$

where $C = \text{const}$, $t^{\frac{3}{2}-\omega} \cdot \varphi(t) \in L_{\infty}(0, \infty)$, and for the resolvent $R(t, \tau)$ the following estimate holds:

$$|R(t, \tau)| \leq C \cdot \left[\frac{\sqrt{\tau} \cdot \sqrt{t}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp \left\{ -\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} \right\} + \frac{\sqrt{\tau} \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{t-\tau}(2t-\tau)} \right] \cdot \exp \left\{ -\frac{t-\tau}{4a^2} \right\}.$$

This publication is supported by the grant project 1164 / GF 4 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

References

1. **Solonnikov V. A., Fasano A.** *One-dimensional parabolic problem arising in the study of some free boundary problems* (in Russian). Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, 2000, 269, 322-338.
2. **Jenaliyev M. T., Ramazanov M. I.** *On a homogeneous parabolic problem in an infinite corner domain*. AIP Conference Proceedings, 2016, 1759, 020085, doi: 10.1063/1.4959699.

3. **Jenaliyev M. T., Amangaliyeva M. M., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I.** *On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel.* Advances in Difference Equations, 2015, 71, 1-14.
4. **Amangaliyeva M. M., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I.** *About Dirichlet boundary value problem for the heat equation in the infinite angular domain.* Boundary Value Problems, 2014, 213, 1-21.
5. **Amangaliyeva M. M., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I.** *On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain.* Siberian Mathematical Journal, 2015, 56 (6), 1234-1248.

FRICITION AND WEAR OF SOLID LUBRICANT NANOPARTICLES. THEORY AND APPLICATIONS

Rapoport L.

Holon Institute of Technology, Holon, Israel, rapoport@hit.ac.il

Inorganic fullerene-like WS₂ and MoS₂ nanoparticles (IF) with structures closely related to (nested) carbon fullerenes and nanotubes have been synthesized in Weizmann Institute of Science by Prof. Tenne's team. Friction experiments with IF added to oil showed lubricating properties superior to those of layered commercially available WS₂ and MoS₂ solid lubricant powders in a definite range of operating conditions. Henceforth, a short description of the tribological behavior of such nanoparticles under different contact conditions is undertaken.

To elucidate the tribological mechanisms involved, a careful analysis of the mating surfaces and the lubricating medium by a number of modern experimental techniques was carried out. In the present work primary attention has been devoted to the study of friction and wear mechanisms of the IF-WS₂ and MoS₂ and some applications of these nanoparticles.

The analysis of the IF nanoparticles showed that most, if not all pristine nanoparticles were closed and hollow, having nearly spherical shape. The average size of the IF-WS₂ particles was close to 120 nm, while it was about 50 nm for IF-MoS₂. It was found that these nanoparticles are capable of withstanding a severe hydrostatic pressure, caused by compression. Detailed structural studies revealed a deformation of the IF nanoparticles and breakage of their outer shells under compression. Friction and wear of steel and ceramic pairs lubricated with oil+IF lubricant have been studied. The similarity in the behavior of steel and ceramic pairs was found to be due to the filling of the valleys, grooves and gaps of rubbed surfaces with the IF nanoparticles and their layers. High contact pressure under friction with oil+IF lubricant leads

to squeezing out of the oil and tight sticking of broken shells of destroyed IF nanoparticles on the rubbed surfaces. On the base of AFM, SEM, TEM and XPS analysis it was concluded that the islands of destroyed IF nanoparticles could provide improved tribological properties of the contact under severe contact conditions. Different applications of IF-WS₂/MoS₂ nanoparticles is discussed.

MONTE CARLO METHOD FOR CALCULATION THE PRICE OF MULTI-ASSET OPTIONS

Rasulov A. S.¹, Raimova G. M.², Bakoyev M. T.³, Rahmatov M. Y.⁴

¹ *University of World Economics and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan, asrasulov@gmail.com*

² *University of World Economics and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan, raimova27@gmail.com*

³ *University of World Economics and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan, mbakoyev@uwed.uz*

⁴ *University of World Economics and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan, mrakhmatov@uwed.uz*

Let q_i be dividend rate of asset X_i , and $a_{ij} = \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}\sigma_{jk}$ ($i, j = 1, \dots, m$) i.e. $A = [a_{ij}] = \sigma_0\sigma_0^T$, where σ_0^T is the transpose of matrix σ_0 . Let r is risk free interest rate. From the Ito formula for the multivariate stochastic process, it is easy to get Black-Scholes equation for multi-asset options:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij}X_iX_j \frac{\partial^2 V}{\partial X_i \partial X_j} + \sum_{i=1}^m (r - q_i)X_i \frac{\partial V}{\partial X_i} - rV = 0, \quad (1)$$

$$V(X_1, \dots, X_m, t) = f(X_1, \dots, X_m), \quad x \in R_+^m, \quad t = T. \quad (2)$$

Let $V(x, t) = E[V(X_{x,t}(T), T)Y_{x,t,1}(T)] = E[f(X_{x,t}(T))Y_{x,t,1}(T)]$ where $X_{x,t}(s)$, $Y_{x,t,y}(s)$, st , is the solution of problem Cauchy for the following system of stochastic differential equations:

$$\begin{cases} dX = c(X, t)ds + \sigma(X, t)d\omega(s), & X(t) = x, \\ dY = -rYds, & Y(t) = y, \end{cases} \quad (3)$$

where $(x, t) \in Q$, $Q = \{0 \leq x_i < \infty, i = 1, \dots, m; 0 \leq t < T\}$. In (1) $\omega(s) = (\omega^1(s), \omega^2(s), \dots, \omega^m(s))^T$ - m - dimensional standard Wiener process, Y - being scalar processes, $c(x, t)$ - m - dimensional column vector, compounded from the coefficients $c_i(x, t) = (r - q_i)X_i$, $\sigma(x, s)$ - matrix with dimensions $m \times m$, where $\sigma(x, s)\sigma^T(x, s) = a(x, s)$, and $a(x, s) = \{a_{ij}X_iX_j\}$, $i, j = 1, \dots, m$.

For the numerical solution of (3) we suppose the following new proposed algorithm. Let us consider the discrete time $T = t_N > t_{N-1} > \dots > t_0$ with the steps $h = \frac{T-t_0}{N}$. Let $(x_0, t_0) \in$

Q , $y_0 = 1$, ξ is a uniformly distributed point on the open surface $\partial S_1(0) \subset R^m$ with the unit radius with the center point of origin, $\rho_0 = \sqrt{m \cdot h}$. We introduce spheroid $S(x_0, t_0, \rho)$, which is obtained with the help of linear transformation $\rho \cdot \sigma(x_0, t_0)$ ball $S_1(0)$ with the shift $x_0 + \frac{\rho^2}{m}c(x_0, t_0)$. Let $\rho = \rho_0$. If $S(x_0, t_0, \rho) \not\subset R_+^m$ we will find $\rho < \rho_0$ such $S(x_0, t_0, \rho)$ which touch the boundary R_+^m . Let $t_1 = t_0 + h$, $x_1 = x_0 + c(x_0, t_0)\frac{\rho^2}{m} + \rho\sigma(x_0, t_0) \cdot \xi$ and $y_1 = y_0 \left(1 - r\frac{\rho^2}{m}\right)$. It is clear that the point x_1 will lay on the surface of spheroid $S(x_0, t_0, \rho)$. Next points are simulated analogously. Let $x_{N+k} = x_k$ and \mathfrak{S}_k - σ -algebra, filtrated by $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ isotropic vectors $\mathfrak{S}_k = \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$. It is possible to prove that constructed sequence of coordinate $\{x_k\}_k$ is martingale. The below assertions is proved [see.1,2].

Lemma. *Let \mathfrak{S}_k - σ -algebra, filtrated by $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ isotropic vectors $\mathfrak{S}_k = \sigma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$. The sequence of coordinate vector process $\{x_k\}_k$ - is martingale relatively \mathfrak{S}_k .*

The next theorem gives to us the order of accuracy one step approximation of (3).

Theorem 1. *Let V be restricted solution in \bar{P} problem (1)-(2), with continuous derivatives $D_x^m D_t^k u$, $0 \leq m + 2k \leq 4$, $k = 0, 1$. Let $X_{x_0, t_0}(s)$, $Y_{x_0, t_0, y_0}(s)$ - a solution of (3) at the points $(x_0, t_0) \in Q$, τ - be a hitting time of the process $(X_{x_0, t_0}(s), s)$ on the boundary P (the point $(X_{x_0, t_0}(\tau), \tau)$ belong upper side surface of cylinder P). Than the order of accuracy (error) of restricted solution for one step $(x_0, t_0) \rightarrow (x_1, t_1) \in \bar{P}$ will be*

$$E[V(x_1, t_1)y_1 - V(X_{x_0, t_0}(\tau), \tau)(Y_{x_0, t_0}(\tau), \tau)] = O(h^2).$$

Let $t_{k+1} = t_k + h$, $x_{k+1} = x_k + c(x_k, t_k)\frac{\rho_k^2}{m} + \rho_k\sigma(x_k, t_k) \cdot \xi_k$, $y_{k+1} = y_k \left(1 - r\frac{\rho_k^2}{m}\right)$, $y_0 = 1$. Here $\xi_1, \dots, \xi_k, \dots$ the sequence of independent isotropic vectors in R^m .

Theorem 2. *Let V be a solution in given domain Q problem (1)-(2), with continuous derivatives $D_x^m D_t^k u$, $0 \leq m + 2k \leq 4$, $k = 0, 1$. The following estimated error of the solution method based on one step approximation will be*

$$E[f(X_{x, t}(T))Y_{x, t, 1}(T) - V(x, t)] = O(h).$$

The complexity of a Monte Carlo method is typically polynomial in the dimension, whereas the deterministic method is typically exponential. In the context of PDEs, a useful feature of Monte Carlo methods is that they allow the solution to be found at just one point, if required (with associated saving in computation), whereas deterministic methods necessarily find the solution at large number of points simultaneously. This property of Monte Carlo methods can be particularly useful in problems such as option pricing, where the value of an option is required only at the time of striking, and for the state of the market at that time.

The proposed above method has two type (approximation and usual classic Monte Carlo)

of errors. We suppose in our further work will do several numerical experiments, compare with the results which were obtained before and will give the results of error analysis.

References

1. Ermakov S. M., Nekrutkin V. V., Sipin A. S. *Random Processes for Classical Equations of Mathematical Physics*. Kluwer Acad. Publ., 1989, pp. 118-173.
2. Rasulov A. S., Mascagni M., Raimova G. M. *Monte Carlo Methods for the Solution of Linear and Nonlinear Boundary Value Problems*. Printing house of UWED, Tashkent, 2006, pp. 101-146.

TO THE NUMERICAL AND ASYMPTOTICAL INVESTIGATION OF SYSTEM REACTION DIFFUSION WITH DOUBLE NONLINEARITY

Sadullaeva Sh. A.

Tashkent University of Information Technology, Tashkent, Uzbekistan, orif_sh@list.ru

Consider the following Cauchy problem in the domain $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in \mathbb{R}^N\}$ for the double nonlinear degenerate parabolic systems

$$\begin{aligned} L_1(u, v) &= -\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(v^{m_1-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \operatorname{div}(c(t)u) + v^{\beta_1} = 0, \\ L_2(u, v) &= -\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{div}(u^{m_2-1}|\nabla v|^{p-2}\nabla v) - \operatorname{div}(c(t)v) + u^{\beta_2} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2)$$

where β_i, p, m_i ($i = 1, 2$) - are the given numerical parameters, $\nabla(\cdot) = \operatorname{grad}(\cdot)$, $0 \leq u_0(x), v_0(x) \in C(\mathbb{R}^N)$, $0 < \gamma(t) \in C(0, \infty)$ are given functions.

The system (1) is a base for modeling of the many physical processes [1-4], for example this system describe the processes of reaction - diffusion, heat conductivity, polytrophic filtration of gas and liquid ($p = 2$) in the nonlinear media with source power of which is equal to $\gamma(t)u^{\beta_i}$, $i = 1, 2$. A specifically property of this equation is it degenerating.

In this talk we discuss very important for computational goal qualitative analysis of a solution of nonlinear problem such us global solvability, non-solvability, a condition of arising blow up solution, estimate, asymptotic of solution, an exact solution depending on value of numerical parameters of considered problems. An influence of parameters of the reaction-diffusion systems to an evolution of the process is investigated. Asymptotic behavior of a self-similar solution established. It is proved that there exist some values of parameters when

the effect of finite velocity of perturbations, localization of solution, blow up have place. The results of numerical experiments are discussed.

References

1. **Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurduomov S. P., Mikhajlov A. P.** *Blow-up in quasilinear parabolic equations*. M., Nauka, 1987 (in Russian).
2. **Zheng P., Mu Ch., Liu D., Yao X., Zhou Sh.** *Blow-up analysis for a quasilinear degenerate parabolic equation with strongly nonlinear source*. Abstract and Appl. Anal. vol. 2012, Article ID 109546, 19 p.
3. **Aripov M., Sadullaeva Sh. A.** *Qualitative properties of solutions of a doubly nonlinear reaction-diffusion system with a source*. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2015, 3, 1090-1099.
4. **Aripov M., Sadullaeva Sh. A.** *An asymptotic analysis of a self-similar solution for the double nonlinear reaction-diffusion system*. J. Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 2015, 6 (6), p. 793-802.

REGULATORIKA OF BIOLOGICAL EXCITABLE MEDIA

Saidalieva M., Hidirova M.

Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies, Tashkent, Uzbekistan, regulatorika@yahoo.com

Regulatorika is the science that involves the study of interconnected activity of regulatory mechanisms based on the ORASTA concept which consists of the operator-regulator OR (capable to accept, recycle and transfer signals) and ASTA (active system with time average, carrying out a feedback loop in system for finite time). Using ORASTA the functional-differential equations of biological excitable media taking into account stimulating and inhibiting interactions, temporal relations, combined feedback and cooperativity in considered processes are developed [1-2]:

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = A_i^N(X(t-h)) \exp\left(-\sum_{k=1}^N \delta_{ik} x_k(t-h_{ik})\right) - b_i X_i(t) \quad (1)$$

with

$$A_i^N(X(t-h)) = a_{io} + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k_1, \dots, k_j=1}^N a_{ik_1, \dots, k_j} \prod_{m=1}^j x_{k_m}(t-h_{ik_m}) \right)$$

and with initial conditions

$$X_i(t) = \varphi_i(t) \text{ at } t_0 - h \leq t \leq t_0 \quad (t_0 > 0), \quad i, j, k_j = 1, 2, \dots, N.$$

Here $X_i(t)$ are the sizes characterizing quantity of a signals, developed by i -th OR at the time moment t ; h_{ik} are a time intervals necessary for i -th OR activity changing under the k -th OR activity influence; a_{i0} , b_i are parameters of formation and disintegration speeds of i -th signal, accordingly; $\varphi_i(t)$ are continuous, positive initial functions. It is entered the vector $\mu_c(C_1, \dots, C_n)$, describing mutual relations between biological systems and external medium. Here

$$C_i = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty A_i^N(S) \exp\left(-\sum_{j=1}^N \delta_{ij} S_j\right) dS_1 \dots dS_N - b_i.$$

Results of the qualitative study for the considered equations (1) and their model systems have shown presence the following regimes: rest, stable stationary state, Poincare type limit cycles, dynamic chaos and "black hole" effect. Origin and development of irregular oscillations were valued by the calculation of Lyapunov's number near strange attractor. Analysis of chaos region has shown that in chaos area there are "r-windows" regions with regular solutions. Regularities of location, sizes and number of the "r-windows" are calculated. As possible applications we consider excitations of cardiac tissue and identification of chaos with an arrhythmia, "black hole" with sudden cardiac death has allowed studying regularities of cardiac activity at the norm and anomalies, condition determination for local correction in the chaos area for leaving in the norm area (in the area of Poincare type limit cycles or "r-windows").

References

1. **Hidirov B. N.** *Selected works on mathematical modeling of living systems regulatorika.* Moscow: Izhevsk, 2014, 304 p. (In Russ.).
2. **Hidirov B. N., Saidalieva M., Hidirova M. B.** *Regulatorika of living systems.* Fan va texnologiyalar, 2014, 136 p. (In Russ.).

**QUATERNIONIC CAUCHY INTEGRAL FORMULA FOR
 α -HUPERHOLOMORPHIC FUNCTIONS**

Sattorov E. N., Ermamatova Z. E.

Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan, sattorov-e@rambler.ru

The Cauchy integral formula plays a significant role in the theory of one-dimensional complex analysis with the Cauchy kernel and its numerous application. In this paper, we present a Cauchy integral formula for α -hyperholomorphic function.

Let $H(C)$ be the set of complex quaternions, it means that each quaternion is represented in the form of $a = \sum_{k=0}^3 a_k i_k$, with the standard basis $i_0 := 1, i_1, i_2, i_3$, where $a_k \in C$, i_0 is the unit and $i_k | k = 1, 2, 3$ are the quaternionic imaginary units: $i_0^2 = i_0 = -i_k^2; i_0 i_k = i_k i_0 = i_k, k = 1, 2, 3; i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3; i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1; i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2$. The complex imaginary unit i commutes with $i_k, k = \overline{0, 3}$. We use the Euclidean norm $|a|$ in $H(C)$, defined by $|a| := \sqrt{\sum_{k=0}^3 |a_k|^2}$.

We shall consider continuously differentiable $H(C)$ -valued functions depending on three real variables $x = (x_1, x_2, x_3)$. On this set the well known (see, [1],[2],[3]) Moisil-Theodoresco operator is defined by the expression $D := \sum_{k=1}^3 i_k \partial_k$, where $\partial_k = \partial / \partial(x_k)$. The action of the operator D on an $H(C)$ -valued function f can be written in a vector form:

$$Df = -div \vec{f} + grad f_0 + rot \vec{f}. \quad (1)$$

That is, $Sc(Df) = -div \vec{f}$ and $Vec(Df) = grad f_0 + rot \vec{f}$. In a good number of physical applications (see [1] and [2]) the operators $D_\alpha = D + M^\alpha$ and $D_{-\alpha} = D - M^\alpha$ are needed, where α is a complex quaternion and M^α denotes the operator of multiplication by α from the right-hand side: $M^\alpha f = f\alpha$.

Let $\lambda \in H(C) \setminus \{0\}$, and let α be its complex- quaternionic square root: $\alpha \in H(C), \alpha^2 = \lambda$. The function $f : \Omega \subset R^3 \rightarrow H(C)$ is called *left- α -hyperholomorphic* if

$$D_\alpha f := f\alpha + i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} f + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3} f = 0. \quad (1)$$

Let $\alpha \in H(C)$ and let

$$\Phi_0(x; \lambda) = -\frac{1}{4\pi|x|} e^{i\alpha|x|}, x \in R^3 \setminus \{0\}, Re\alpha > 0 \quad (3)$$

be the fundamental solution of the Helmholtz operator $\Delta_\lambda := \Delta + I\lambda = -D_\alpha D_{-\alpha}$, where $\Delta := \sum_{k=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ and I is the identity operator.

Define the function $\Phi(y, x, \lambda)$ for $s > 0$, $v \geq 1$ by the equality

$$\Phi(y, x, \lambda) = \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_1^2}} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_1} \right] \frac{ch(\lambda u)}{\sqrt{u^2 + s}} du, \quad w = i\sqrt{u^2 + s} + y_1. \quad (4)$$

Then the fundamental solution of the operator D_α, K_α , is given by the formula (see [3])

$$K_\alpha(x) := -D_\alpha \Phi(y, x; \lambda),$$

and its explicit form can be seen.

For α -hyperholomorphic function the quaternionic left Cauchy integral formula is defined (see [3, Subsection 4.15]):

Theorem. *Let Ω is a bounded simply connected domain in R^3 with boundary $\partial\Omega$ composed of a compact connected part T of the plane $y_3 = 0$ and a smooth Lyapunov surface S lying in the half-space $y_3 > 0$, with $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega = S \cup T$. Let $f \in C^p(\Omega, H(C))$. Then*

$$K_\alpha^\sigma[f](x) := - \int_{\partial\Omega} \tilde{K}_\alpha^x[n_\tau f(\tau)] = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

where

(1) If $\alpha = \alpha_0 \in C$, then

$$\tilde{K}_\alpha^x[f](\tau) := K_{\alpha_0}(x - \tau)f(\tau). \quad (6)$$

(2) If $\alpha \notin \bar{\mathfrak{R}}$, $\vec{\alpha}^2 \neq 0$, then

$$\tilde{K}_\alpha^x[f](\tau) := \frac{1}{2\sqrt{\vec{\alpha}^2}} K_{\xi_+}(x)f(\tau)\sqrt{\vec{\alpha}^2} + \vec{\alpha} + \frac{1}{2\sqrt{\vec{\alpha}^2}} K_{\xi_-}(x)f(\tau)\sqrt{\vec{\alpha}^2} - \vec{\alpha}. \quad (7)$$

(3) If $\alpha \notin \bar{\mathfrak{R}}$, $\vec{\alpha}^2 = 0$, then

$$\tilde{K}_\alpha^x[f](\tau) := K_{\alpha_0}(x)f(\tau) + \frac{\partial}{\partial\alpha_0}[K_{\alpha_0}](x)f(\tau)\vec{\alpha}. \quad (8)$$

(4) If $\alpha \in \mathfrak{R}$, $\alpha_0 \neq 0$, then

$$\tilde{K}_\alpha^x[f](\tau) := \frac{1}{2\alpha_0} K_{2\alpha_0}(x)f(\tau)\alpha + \frac{1}{2\alpha_0} [K_{\alpha_0}](x)f(\tau)\vec{\alpha}. \quad (9)$$

(5) If $\alpha \in \mathfrak{R}$, $\alpha_0 = 0$, then

$$\tilde{K}_\alpha^x[f](\tau) := K_0(x)f(\tau) + \Phi_0(x)f(\tau)\alpha. \quad (10)$$

References

1. **Brackx F., Delanghe K., Sommen F.** *Clifford analysis*. L.:Pitman, 1982, V.76, 308 pp.
2. **Gurlebeck K., Sprobig W.** *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems*. Akademie-Verlag, 1989.
3. **Kravchenko V. V., Shapiro M. V.** *Integral representations for spatial models of mathematical physics*. Addison Wesley Longman Ltd., Pitman Research Notes in Mathematics Series, 1996, v.351.

THRESHOLD THEOREMS FOR GENERALIZED EPIDEMIC SIZE IN A NEW MARKOVIAN EPIDEMIC MODEL WITH IMMUNIZATION

Sedov S. S.

Branch of Russian State University of Oil and Gas in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan,
 kadabrasss@mail.ru

As the epidemic model we consider a continuous-time Markov process $\xi(t) = (R(t), S(t))$ with transition probabilities given by

$$\begin{cases} P(\xi(t + \Delta t) = (r - 1, s + 1) / \xi(t) = (r, s)) = \lambda r^\alpha s \Delta t + o(\Delta t), \\ P(\xi(t + \Delta t) = (r, s - 1) / \xi(t) = (r, s)) = \mu s \Delta t + o(\Delta t), \\ P(\xi(t + \Delta t) = (r - 1, s) / \xi(t) = (r, s)) = \theta s \Delta t + o(\Delta t), \end{cases} \quad (1)$$

and initial condition $\xi(0) = (n, m)$, where $0 \leq s \leq n + m - r$, $0 \leq r \leq n$, ρ_1 and ρ_2 are the relative infection and removal rate respectively. The components of $\xi(t)$ represent respectively the number of susceptibles and infectives at time t . If $a=1$ and $\rho_2 = 0$ we obtain the classical general stochastic epidemic in closed, homogeneously mixing population. If $0 < a < 1$, then model takes into account a non-homogeneous mixing in a population.

The third transition of the model (1) reflects a possibility of susceptibles immunization in some sense.

If this probability has the form $\rho_2 r s \Delta t + o(\Delta t)$, then that model is well-known as Downton model [1] or Nagaev-Rakhmanina model with natural immunization [2].

Note that states of the form $(k, 0)$ are absorbing.

Absorption at $(n - k, 0)$ means that epidemic size is equal to k for general stochastic epidemic or generalized epidemic size $\nu = \nu_1 + \nu_2$ is equal to k , where ν_2 is the immunization size and ν_1 is equal to initial susceptibles that are ultimately infected. Much of the work on the standard epidemic process has been directed toward finding the distribution of epidemic size, ν . However, explicit expressions are, in general, very cumbersome. In connection with this in the work of Nagaev and Startsev [3]. Was proposed a method of asymptotical analysis, as $n \rightarrow \infty$ in that the problem of epidemic size reduce to boundary crossing problem for sums of independent random variables.

This report is devoted to obtaining of the limit distributions for the generalized epidemic size in the model (1). We suppose that $m \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$ and parameters of the model are changed together with n ("series scheme"). The parameter $\theta_1(n) = \rho_1/n^a$ plays a regulating role and similar to the parameter ρ_1/n in the general stochastic epidemic. The threshold theorems are concerned of the case when $\theta_1(n) \rightarrow 1$, $m(1 - \theta_1(n)) = O(1)$ and $m^3 = O(n)$. In this case limit boundary $g(t)$ (in corresponding boundary problem) is a continuous function of parabolic form. In other cases this boundary is degenerate, namely, it is infinite at $t \in (0, 1)$, and consequently the normal distribution appears as a limit law.

Theorem. *If $\theta_1 \rightarrow 1$, $\beta \equiv m(1 - \theta_1) \rightarrow \beta_0, \frac{m}{n} \rightarrow \gamma_0 < \infty$, $|\beta_0| < \infty$, then for \forall fixed $x > 0$*

$$P\left(\nu > \frac{(1 + \theta_2)m^2}{2}\right) \Rightarrow P\left(w(t) < \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x/2}}{\sqrt{1 + \theta_{20}}}\beta_0 t - \frac{(\theta_{10} + \theta_{20})\alpha\gamma_0\left(\frac{x}{2}\right)^{3/2}}{4(1 + \theta_{20})^{5/2}}t^2, 0 \leq t \leq 1\right)$$

References

1. **Dawton F.** *The ultimate size of carrier-born epidemic.* Biometrika, 1968, v. 55, No2, 277-289pp.
2. **Nagaev A. V., Rakhmanina G. I.** *Threshold theorems for a stochastic epidemic model with natural immunization..* Math. notes, 1970, v.III, N2.
3. **Nagaev A. V., Startsev A. N.** *The asymptotic analysis of a stochastic model of an epidemic.* Theory Prob Appl, 1970, V. 15, 98-107pp.

UNIVERSAL TEICHMÜLLER SPACE AS A NON-TRIVIAL EXAMPLE OF INFINITE-DIMENSIONAL COMPLEX MANIFOLDS

Sergeev A. G.

Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia, sergeev@mi.ras.ru

At the moment we cannot say that there is a well-developed theory of infinite-dimensional complex manifolds. So it is important to have different examples of such manifolds. One of such examples is provided by the universal Teichmüller space and we shall present in our talk main complex geometric features of this remarkable infinite-dimensional manifold. The universal Teichmüller space \mathcal{T} is the space of normalized quasisymmetric homeomorphisms of the unit circle S^1 , i.e. orientation-preserving homeomorphisms of S^1 , extending to quasiconformal maps of the unit disk Δ and fixing three points on S^1 . It is a complex Banach manifold with the complex structure provided from Bers embedding of \mathcal{T} into the complex Banach space of holomorphic quadratic differentials in a disk. The name of \mathcal{T} is motivated by the fact that all classical Teichmüller spaces $T(G)$, associated with compact Riemann surfaces, are contained in \mathcal{T} as complex subspaces. Another important subspace of \mathcal{T} is given by the space \mathcal{S} of normalized orientation-preserving diffeomorphisms of S^1 . The space \mathcal{S} is a Kähler Frechet manifold provided with a symplectic structure compatible with the complex structure of \mathcal{S} . We construct a Grassmann realization of \mathcal{T} by embedding it into the Grassmann manifold of a Hilbert space which coincides with the Sobolev space $V = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R})$ of half-differentiable functions on the circle. This embedding realizes the group $QS(S^1)$ of quasisymmetric homeomorphisms of S^1 as a subgroup of symplectic group $Sp(V)$. It also defines an embedding of \mathcal{T} into the space of complex structures on V compatible with symplectic structure. The latter space may be considered as an infinite-dimensional Siegel disk.

COMPUTER MODELING OF SKIN EPIDERMIS ACTIVITY

Shakarov A. R.

Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies, Tashkent, Uzbekistan, shakarovalisher@mail.ru

The purpose of this work is to develop mathematical and computer models for analyzing regulatory mechanism of skin epidermis dynamics at norm and at skin diseases. The system of functional-differential equations for analyzing regulatory mechanisms of interconnected functioning "melanocyte-keratinocyte" system, based on modeling technique of cellular communities regulatorika [1] is developed. The results of quantitative and qualitative analysis

of developed functional-differential equations show that number dynamics of the skin epidermis cellular communities have the following regimes: rest, stable stationary state, regular oscillations which can be identified as normal condition of the epidermis activity and irregular fluctuations with destructive changes conform to pathological condition of the skin. The developed models allow to research mechanisms of occurrence, development and consequences of concrete skin diseases (for example, psoriasis and acquired leukoderma), and also the analysis of possible ways of its diagnostics, forecasting and treatment by means of mathematical and computer modeling. The paper provides a new mathematical and computer models able to describe regulatory mechanisms in the skin epidermis at the norm and anomalies taking into account spatial and temporal relations.

Reference

1. **Saidaliev M., Hidirva M. B.** *ISJ Theoretical and Applied Science*. France, Publishers International Linking Association (USA), 2014, 7-11 pp.

ON AN APPROACH TO THE THEORY OF BICOMPLEX HOLOMORPHIC FUNCTIONS

Shapiro M.

Holon Institute of Technology, Holon, Israel, shapiro1945@outlook.com

In classic multidimensional complex analysis, a holomorphic mapping in \mathbb{C}^2 is just a pair of holomorphic functions of two complex variables with no relations between the functions themselves. It turns out that it is possible to introduce a Cauchy-Riemann type relation in such a way that the arising subclass of holomorphic mappings possesses a rich theory quite similar to that of functions in one variable. It will be shown that a right way of treating it is via the so-called bicomplex analysis, that is, a study of derivable bicomplex functions. The main peculiarities of this approach will be presented.

OLD AND NEW IN COMPLEX DYNAMICAL SYSTEMS

Shoikhet D.

*Holon Institute of Technology & The Galilee Research Center for Applied Mathematics,
Holon, Israel, davidsho@hit.ac.il*

There is a long history associated with the problem on iterating holomorphic mappings and their fixed points, the work of G. Julia, J. Wolff and C. Carathéodory being among the most important.

In this talk we give a brief description of the classical statements which combine celebrated Julia's Theorem in 1920, Carathéodory's contribution in 1929 and Wolff's boundary version of the Schwarz Lemma in 1926 and their modern interpretations.

One of the first applicative models of the complex dynamical systems on the unit disk arose more than hundred years ago in investigations of dynamics of stochastic branching processes.

In 1874 F. Galton and H. W. Watson, in treating the problem of the extinction probability of family names formulated a mathematical model in terms of the probability generating function: $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, $|z| < 1$ where z is a complex variable, $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots$ are nonnegative numbers (probabilities) such that $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, and its iterations: $F^{(0)}(z) = z$, $F^{(n+1)}(z) = F^{(n)}(F(z))$.

The first complete and correct determination of the extinction probability for the Galton–Watson process as the limit points of the iteration sequence was given by J.F. Steffensen in 1930. Since that the interest in this model has increased because of connections with chemical and nuclear chain reactions, the study of the multiplication of electrons in the electron multiplier, the theory of cosmic radiation and many other biological and physical problems.

Note that if the original Galton–Watson process related to discrete-time branching process (i.e., it is described by iteration process of a single probability generating function) the further development involved also the consideration of continuous time branching processes based on one-parameter semigroups (flow) of analytic self-mappings of the unit disk. A classical problem in analysis is: given a function $F(z)$, to find a function $F(z, t)$, with $F(z, 1) = F(z)$ satisfying the semigroup property: $F(z, t + s) = F(F(z, t), s)$, $t, s \geq 0$, where z is a complex variable. Since this formula expresses the characteristic property of iteration when t and s are integers we may consider $F(z, t)$ as a fractional iterate of F , when t is not an integer.

Kœnigs (1884) showed how this problem may be solved, if F is analytic self mapping on the unit disk with an interior fixed point $z_0 = F(z_0)$, such that $0 < |F'(z_0)| < 1$, by using the convergence of the sequence $F^{(n)}(z)$ to z_0 , as $n \rightarrow \infty$ in a neighborhood of the point z_0 .

These and other problems led to the so called **Denjoy–Wolff Theory** which since 1926 has been developed in many directions in terms of classical dynamics in finite and infinite complex spaces as well as in terms of the hyperbolic geometry.

In this talk we also consider the asymptotic behavior of semigroups generated by holomorphic functions by using infinitesimal versions of the **Schwarz–Wolff Lemma** and the **Julia–Carathéodory Theorem**.

These enable us to describe the class of univalent functions which are starlike and spirallike with respect to a boundary point as well as functions convex in one-direction.

In addition, we discuss conditions which ensure the existence of backward flow invariant sets for semigroups of holomorphic self-mappings of a domain D . More precisely, the problem is the following.

Given a one-parameter semigroup $S = F(z, t)$ on D , find a simply connected subset Ω in D (if it exists) such that each element of S is an automorphism of Ω , in other words, such that S forms a one-parameter group on.

Furthermore, we mention a deep relationship between complex dynamics and the theory of composition operators on Hardy and Bergman spaces.

ON A GENERALISED LAPLACE OPERATOR

Shopulaton Sh. Sh.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, shomurod_shopulaton@mail.ru

The classical theory of potential is connected with such kind of classes as harmonic and subharmonic functions. Their definitions can be founded, for example in [1]. One of the notable theorems in the theory of subharmonic functions is Privalov theorem [2]. In this paper, we give some properties of *generalised Laplace operator* and show the importance of conditions in the Privalov theorem by an example. First of all, let's give the construction of the *upper* and the *lower generalised Laplace operators*.

Let $u(x)$ be an upper semi-continuous function in the domain $D \in \mathbb{R}^n$ and $u(x) \neq -\infty$. Then this function is measurable and bounded above in every ball $B(x^0, r) \in D$. In the case of summability of a function $u(x)$ on the ball $B(x^0, r)$, we define $M_r u(x^0)$ as the mean u over the ball $B(x^0, r)$, otherwise we assume $M_r u(x^0) := -\infty$.

Remark 1. Above conditions can be changed to one $u \in L^1_{loc}(D)$ condition.

For the point $x^0 \in D \setminus u^{-1}(-\infty)$ we define *upper* $\bar{\Delta}u(x^0)$ and *lower* $\underline{\Delta}u(x^0)$ *generalised Laplace operators* of a function u at the point x^0 , constructed by the mean of balls with following equalities:

$$\bar{\Delta}u(x^0) := 2(n+2) \cdot \overline{\lim}_{r \rightarrow +0} \frac{M_r u(x^0) - u(x^0)}{r^2},$$

$$\underline{\Delta}u(x^0) := 2(n+2) \cdot \lim_{r \rightarrow +0} \frac{M_r u(x^0) - u(x^0)}{r^2}.$$

Here, $u^{-1}(-\infty) := \{x \in D : u(x) = -\infty\}$.

Remark 2. Note that this kind of construction can also be implemented by the mean of a function u on the surface of the sphere with a center at the point x^0 and a radius r .

Some properties of generalised Laplace operators:

(a) If the function $u(x)$ is twice continuously differentiable in some neighbourhood of the point x^0 , then

$$\overline{\Delta}u(x^0) = \underline{\Delta}u(x^0) = \Delta u(x^0), \quad (1)$$

where Δ is a Laplace operator.

(b) If the function $u(x) \in C(D)$ satisfies following inequality at every point of its domain

$$\underline{\Delta}u(x) \leq 0 \leq \overline{\Delta}u(x), \quad (2)$$

then $u(x)$ will be harmonic in D .

(c) If the function $u(x)$ is subharmonic in the domain D , then at any point $x^0 \in D$ holds following inequalities:

$$\overline{\Delta}u(x^0) \geq \underline{\Delta}u(x^0) \geq 0. \quad (3)$$

Theorem (Privalov). *If the function $u(x)$, $u(x) \not\equiv -\infty$ and upper semi-continuous in the domain $D \in \mathbb{R}^n$, holds following conditions*

$$\overline{\Delta}u(x) \geq 0 \quad \forall x^0 \in D \setminus \{E \cup u^{-1}(-\infty)\}, \quad \text{mes}(E) = 0 \quad (4)$$

$$\overline{\Delta}u(x) > -\infty \quad \forall x^0 \in D \setminus u^{-1}(-\infty) \quad (5)$$

then the function will be subharmonic in D .

Example. Let $E = \{|x| \leq 1\}$, $D = \mathbb{R}^3$ and

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} - 1, & \text{if } |x| \geq 1; \\ 0, & \text{if } |x| < 1. \end{cases}$$

$u(x)$ is not subharmonic in \mathbb{R}^3 , but $\overline{\Delta}u(x) > -\infty$ in \mathbb{R}^3 . The example shows that how's important $\overline{\Delta}u(x) \geq 0$ inequality almost everywhere in D .

References

1. **Sadullaev A. S.** *Pluripotential theory and its applications*. Palmarium academic publishing, 2012, 307p (in Russian).

2. **Privalov I. I.** *To the definition of a subharmonic function.* News of the USSR Academy of Sciences, 1941, 5, 281-284 pp (in Russian).
3. **Brelo M.** *Foundations of classical potential theory.* M., "Mir", 1964, 217p (in Russian).
4. **Privalov I. I.** *Subharmonic functions.* USTP PCTI USSR, M.-L., 1937, 202p (in Russian).

STRUCTURE OF ESSENTIAL AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF THREE-ELECTRON SYSTEMS IN THE IMPURITY HUBBARD MODEL

Tashpulatov S. M.

Institute of Nuclear Physics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,
toshpul@mail.ru, sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@inp.uz

The Hubbard model is currently one of the most extensively studied multielectron models of metals. But little is known about exact results for the spectrum and wave functions of the crystal described by the Hubbard model. The spectrum and wave functions of the system of three electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [1].

We consider the energy operator of three-electron systems in the Impurity Hubbard model and describe the structure of the essential and discrete spectrum of the system for second doublet state. The Hamiltonian of the chosen model has the form

$$\begin{aligned}
 H = & A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow} + (A_0 - A) \sum_{\gamma} a_{0,\gamma}^+ a_{0,\gamma} + \\
 & + (B_0 - B) \sum_{\tau,\gamma} (a_{0,\gamma}^+ a_{\tau,\gamma} + a_{\tau,\gamma}^+ a_{0,\gamma}) + (U_0 - U) a_{0,\uparrow}^+ a_{0,\uparrow} a_{0,\downarrow}^+ a_{0,\downarrow}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Here, A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site, B (B_0) is the transfer integral between electrons (between electron and impurities) neighboring sites (we assume that $B > 0$ ($B_0 > 0$) for convenience), and the summation over τ ranges the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons in the regular (impurity) sites, γ is the spin index, $\gamma = \uparrow$ or $\gamma = \downarrow$, and $a_{m,\gamma}^+$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$. Let $\varepsilon_1 = A_0 - A$, $\varepsilon_2 = B_0 - B$, and $\varepsilon_3 = U_0 - U$. The three electron systems has a quartet state, and two doublet state [1]. The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space \mathcal{H}_{as} . Let φ_0 be the vacuum vector in the antisymmetric Fock space \mathcal{H}_{as} . The second doublet state has the basis functions ${}^2d_{m,n,p}^{1/2} = a_{m,\uparrow}^+ a_{n,\uparrow}^+ a_{p,\downarrow}^+ \varphi_0$. The subspace $\tilde{\mathcal{H}}_2^d$, corresponding to the second doublet state is the set of all vectors of the form

$\psi = \sum_{m,n,p \in Z^\nu} \tilde{f}(m, n, p)^2 d_{m,n,p}^{1/2}$, $\tilde{f} \in l_2^{as}$, where l_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^3)$. In the quasimomentum representation, the operator \tilde{H}_2^d acts in the Hilbert space $L_2^{as}((T^\nu)^3)$ as

$$\begin{aligned} (\tilde{H}_2^d \tilde{f})(\lambda, \mu, \gamma) &= 3A\tilde{f}(\lambda, \mu, \gamma) + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i + \cos \mu_i + \cos \gamma_i] \tilde{f}(\lambda, \mu, \gamma) + \\ &+ U \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \mu, \lambda + \gamma - s) ds + U \int_{T^\nu} \tilde{f}(\lambda, s, \mu + \gamma - s) ds + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \mu, \gamma) ds + \\ &+ \varepsilon_1 \int_{T^\nu} \tilde{f}(\lambda, s, \gamma) ds + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} \tilde{f}(\lambda, \mu, s) ds + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [\cos s_i + \cos \lambda_i] \tilde{f}(s, \mu, \gamma) ds + \\ &+ 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [\cos s_i + \cos \mu_i] \tilde{f}(\lambda, s, \gamma) ds + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [\cos s_i + \cos \gamma_i] \tilde{f}(\lambda, \mu, s) ds + \\ &+ \varepsilon_3 \left[\int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, t, \gamma) ds dt + \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(\lambda, t, r) dt dr \right], \end{aligned} \quad (3)$$

where L_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^3)$.

We verify that the operator \tilde{H}_2^d can be represented in the form $\tilde{H}_2^d = \tilde{H}_2^s \otimes I_1 + I_2 \otimes \tilde{H}_1$, where $(\tilde{H}_1 f)(\lambda) = \{A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos \lambda_i\} \tilde{f}(\lambda) + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} \tilde{f}(s) ds + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [\cos s_i + \cos \lambda_i] \tilde{f}(s) ds$, $(\tilde{H}_2^s f)(\lambda, \mu) = \{2A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i + \cos \mu_i]\} f(\lambda, \mu) + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} \tilde{f}(\lambda, t) dt + \varepsilon_1 \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, \mu) ds + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \lambda_i + \cos s_i] \tilde{f}(s, \mu) ds + \varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(s, t) ds dt + 2\varepsilon_2 \int_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} [\cos \mu_i + \cos t_i] \tilde{f}(\lambda, t) dt + \varepsilon_3 \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \tilde{f}(t, \xi) dt d\xi$. Therefore, we must investigate the spectrum of the operators \tilde{H}_1 , and \tilde{H}_2^s .

The continuous spectrum of operator \tilde{H}_1 coincides with the segment $\sigma_{cont}(\tilde{H}_1) = [A - 2B\nu, A + 2B\nu]$, where ν is lattice dimensionality.

Theorem 1. 1. If $\nu = 1$, $0 < \varepsilon_1 \leq 2B$, and $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, then the essential spectrum of the system second doublet-state with impurity operator \tilde{H}_2^d consists of the union of not smaller than six and no more than seven segments $\sigma_{ess}(\tilde{H}_2^d) = [2z_1 + A - 2B, 2z_1 + A + 2B] \cup [z_1 + 2A - 4B, z_1 + 2A + 4B] \cup [z_1 + z_2 + A - 2B, z_1 + z_2 + A + 2B] \cup [2z_2 + A - 2B, 2z_2 + A + 2B] \cup [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [z_2 + 2A - 4B, z_2 + A + 4B] \cup [z_3 + A - 2B, z_3 + A + 2B]$, and the relation $4 \leq N \leq 6$ holds for the number of three-electron impurity states N . Here and hereafter, $z_1 < A - 2B$, and $z_2 > A + 2B$ is an eigenvalue of the operator \tilde{H}_1 , and z_3 is an eigenvalue of the operator \tilde{H}_2^s .

2. If $\nu = 1$, $0 < \varepsilon_1 \leq 2B$, and $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, then the essential spectrum of the operator \tilde{H}_2^d consists of the union of not smaller than three and no more than four segments $\sigma_{ess}(\tilde{H}_2^d) = [2z_1 + A - 2B, 2z_1 + A + 2B] \cup [z_1 + 2A - 4B, z_1 + 2A + 4B] \cup [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [z_3 + A - 2B, z_3 + A + B]$, and the relation $1 \leq N \leq 2$ holds for the

number of three-electron impurity states N .

3. If $\nu = 1$, $0 < \varepsilon_1 \leq 2B$, and $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, then the essential spectrum of the operator \tilde{H}_2^d consists of the union of not smaller than three and no more than four segments $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}^q) = [2z_2 + A - 2B, 2z_2 + A + 2B] \cup [z_2 + 2A - 4B, z_2 + 2A + 4B] \cup [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [z_3 + A - 2B, z_3 + A + 2B]$, and the relation $1 \leq N \leq 2$ holds for the number of three-electron impurity states N .

4. If $\nu = 1$, $0 < \varepsilon_1 \leq 2B$, and $\varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$ or $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, then the essential spectrum of the operator \tilde{H}_2^d consists of the union of not smaller than one and no more than two segments $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2^d) = [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [z_3 + A - 2B, z_3 + A + B]$, and discrete spectrum of the operator \tilde{H}_2^d is empty.

References

1. **Tashpulatov S. M.** *Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard Model.* Theoretical and Mathematical Physics, 2014, 179 (3), 712-728 pp.

COMPUTER MODELING OF REGULATORY MECHANISMS OF LIVER CELLS AND HEPATITIS B VIRUSES

Turgunov A. M.

Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies, Tashkent, Uzbekistan, abrorjon-2017@mail.ru

Hepatitis B is a viral infection that affects the liver cells. According to WHO estimates, approximately 686,000 people die annually from hepatitis B infection, including cirrhosis and liver cancer [1]. Currently, infectious diseases have a high prevalence and for a long time occupy the third place [2]. Therefore, one of the most important tasks in medicine, including the field of virology, is to study the patterns of functioning of the interrelated activity of liver cells and hepatitis B viruses using methods of mathematical and computer modeling.

Currently, many scientific papers have been proposed numerous mathematical models describing the dynamics of viral hepatitis B in the liver cell. In these studies, the study focuses on the dynamics of the hepatitis B virus by using mathematical modeling at the cellular level on different approaches.

In the modeling regulatory of liver cell and hepatitis B virus, functional-differential equations were used. A mathematical model for the functioning of the regulatory of the liver

cell (hepatocyte) and HBV at the molecular-genetic level has been developed by B.N. Hidirov [3], and can be presented in the following form [4]:

$$\begin{aligned}\frac{dX(t)}{dt} &= \frac{aX^2(t-1)}{1+X^2(t-1)+cY^2(t-1)} - X(t); \\ \frac{dY(t)}{dt} &= \frac{bX(t-1)Y(t-1)}{1+dX^2(t-1)+Y^2(t-1)} - Y(t);\end{aligned}\quad (1)$$

$$X(t) = \varphi_1(t); Y(t) = \varphi_2(t) \quad \text{at } t_0 \leq t \leq t_0 + 1,$$

where $X(t), Y(t)$ - the values characterizing the activity of molecular-genetic systems of liver cells and hepatitis B viruses, respectively; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - parameters of the regulatory ($\varepsilon_1 = \frac{\tau_x}{h}, \varepsilon_2 = \frac{\tau_y}{h}$); τ_x, τ_y - parameters characterizing the "lifespan" of products of molecular genetic systems of hepatocyte and hepatitis B viruses - hepatocyte-hepatitis B viruses; h - time required for feedback in the system under consideration; a, b - constant rates of formation of products and c, d - parameters of the degree of interspersion of molecular genetic systems of hepatocyte and hepatitis B viruses; $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ - continuous functions on $[t_0, t_0 + 1]$; t_0 - the beginning of the research; all parameters are positive.

In modeling, the functioning of the interconnected activity of the molecular genetic systems of the liver cell and hepatitis B viruses takes into account the time delay and biological feedback.

This model describes the dynamics of the interrelated activity of liver cells and hepatitis B viruses at the molecular-genetic level. The system of functional-differential equations (1) is a nonlinear system and is a closed system. Therefore, we qualitatively investigate the equilibrium position of the equation (1). A computer model for the analysis of liver function and hepatitis B viruses was developed using the Runge-Kutta method [5]. Computational experiments on the quantitative analysis of the regulatory of the hepatocyte and HBV show the presence of "black hole" effects regime (Figure).

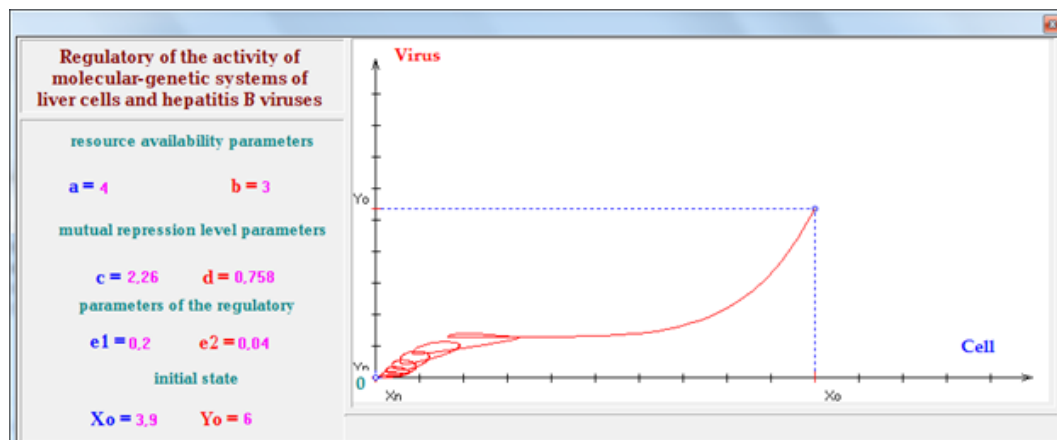


Figure. The regime of the "black hole" regulatory of liver cells and hepatitis B viruses

The resulted results in the figure show that the functioning of the molecular genetic systems of the liver cell and HBV tends to zero and destroys the body.

Thus, the developed mathematical and computer models for studying the functioning of regulatory mechanisms of liver cells and hepatitis B viruses allow to assess the state of functioning of molecular-genetic systems of liver cells and hepatitis B viruses; establish the molecular genetic basis of infectious processes; to assess and predict the onset of the characteristic stages of the course of the disease with viral hepatitis B.

References

1. **World Health Organization.** Fact Sheet, July, 2016. Available at <http://www.who.int/topics/hepatitis/en/>
2. **Perova I. G., Khludeeva O. I.** *Management of the development of infectious diseases.* System of information boxes, 2015, issue 1 (126), 174-176 pp.
3. **Hidirov B. N., Turgunov A. M.** *Modeling of molecular genetics mechanisms of control of viral hepatitis B.* Problems of Informatics and Energy. Tashkent, 2012, No 2-3. 13-18 pp.
4. **Hidirova M. B., Turgunov A. M.** *Computer modeling of infectious disease with viral hepatitis B using information technologies.* XV International Conference "Computer Science: Problems, Methodology, Technologies." Voronezh, 2015, 482 p.
5. **Pimenov V. G.** *Functional-differential equations in biology and medicine.* Tutorial, Ekaterinburg, 2008. 92 p.

ABOUT DOMAINS OF CONVERGENCE OF HARTOGS AND JACOBI-HARTOGS LACUNARY SERIES

Tuychiyev T. T.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, tahir1955@mail.ru

This article is devoted to research domains of convergence of Hartogs, Jacobi-Hartogs lacunary series of and multidimensional analogue theorems of Fabri and Polya on lacunary series.

We know that many problems of multidimensional complex analysis, especially problems which are connected with holomorphic extension of functions, are solved via Hartogs and Jacobi-Hartogs series. Hence the research of domains convergence series and finding the holomorphic envelopes of such series generates big interest (see [1,2] and others).

Let the formal lacunary Hartogs series be

$$f(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n_k}(z) w^{n_k} \quad (1)$$

with holomorphic coefficients $c_{n_k}(z) \in O(D), k = 0, 1, 2, \dots$, where $D \subset \mathbb{C}^n$ some domain. At the same time we will demand natural condition, that radius of convergent $R(z)$ series (1) positive for each fixed point $z \in D$.

Let's begin with the next result, which is multidimensional analogue of Fabri theorem [3] about lacunas.

Theorem 1. *Let the series (1) be such that:*

- 1) $c_{n_k}(z) \in O(D), k = 0, 1, 2, \dots$ and for each fixed $z \in D$ equality $\overline{\lim}_{n_k \rightarrow \infty} |c_{n_k}(z)|^{\frac{1}{n_k}} = 1$;
- 2) $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n_k} = 0$.

Then there is nowhere dense closed set $S \subset D$ such that $f(z, w)$ holomorphic in the domain $(D \setminus S) \times \{|w| < 1\}$ and each point of the set $(D \setminus S) \times \{|w| = 1\}$ is a singular point of the function $f(z, w)$.

We note that if in theorem 1 we will demand that series (1) converges equally in some polydisk $D \times \{|w| < r\} \subset \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w, 0 < r < 1$, then $S = \emptyset$.

If we remove the condition in theorem 1 $\overline{\lim}_{n_k \rightarrow \infty} |c_{n_k}(z)|^{\frac{1}{n_k}} = 1$ and replace this condition by a weaker condition such that the series (1) converges for every fixed $z \in D$ in the disc $|w| < R(z)$ (naturally, here it is assumed that the radius of convergence $R(z)$ series (1) affirmative for each fixed point $z \in D$), then the following more general theorem holds.

Theorem 2. *Let the series (1) satisfies following conditions:*

- 1) $c_{n_k}(z) \in O(D), k = 0, 1, 2, \dots$ and for every fixed point $z \in D$ converges in the disc $|w| < R(z)$,
- 2) $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n_k} = 0$.

Then there exist a closet nowhere dense set $S \subset D$ such that it is $f(z, w)$ holomorphic in the set of variables in $\{z \in D \setminus S, |w| < R_(z)\}$ and each point of the set $\{z \in D \setminus S, |w| = R_*(z)\}$ is the singular point of the function $f(z, w)$, where $R_*(z) = \underline{\lim}_{w \rightarrow z} R(w)$ - the lowest regularization of the radius of the function $R(z)$.*

For the series (1) there is next multidimensional analogue of Polya theorem [4] about lacunas holds.

Theorem 3. *Let the series (1) satisfy the following conditions:*

- 1) $c_{n_k}(z) \in O(D)$, $k = 0, 1, 2, \dots$
- 2) *for each fixed $z \in D$ converges in the disc $|w| < R(z)$, $R(z) > r > 0$;*
- 3) $\varliminf_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n_k} = 0$.

Then there exist closed nowhere dense set $S \subset D$ such that the series (1) defines a single-valued holomorphic function with a univalent domain of existence

$$f(z, w) \in \mathcal{O}((D \setminus S) \times \{|w| < R_*(z)\}),$$

where $R_*(z) = \varliminf_{w \rightarrow z} R(w)$ - is the lower regularization of the radius of the function $R(z)$.

Analogous problems for Jakobi-Hartogs series also discuss in this report.

References

1. **Sadullaev A., Chirka E. M.** *On extension of the functions with polar singularities.* Math. 1987, V.132 No 3, 383-390.
2. **Sadullaev A.** *The theory of pluripotential, Usage.* Palmarium akademik publishing, Saarbrücken, Deutschland, 2012.
3. **Fabry E.** *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement de Taylor.* Ann. ec. norm. sup., Paris, 1896, 13(3), 367-399.
4. **Polya G.** *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen.* Math. Z, 1929, 29, 549-640.

THE BELTRAMI EQUATION AND RELATED CLASSES OF MAPPINGS

Yakubov E.

Holon Institute of Technology, Holon, Israel, yakubov@hit.ac.il

We will consider different classes of the Beltrami equation (classical, relaxed classical and alternating cases).

We will focus on existence, uniqueness and representation properties of solutions as well as mapping properties.

SMOOTH PARAMETRIZATIONS, THEIR OLD AND NEW APPLICATIONS, AND CONNECTIONS TO SINGULARITY THEORY

Yomdin Y.

Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel, yosef.yomdin@weizmann.ac.il

Smooth parametrization consists in a subdivision of a mathematical object under consideration into simple pieces, and then parametric representation of each piece, while keeping control of high order derivatives. Main examples for this talk are C^k or analytic parametrizations of semi-algebraic and o-minimal sets.

We provide an overview of some results and open problems on smooth parametrizations and their applications in several apparently rather separated domains: Smooth Dynamics, Diophantine Geometry, and Analysis. The structure of the results, open problems, and conjectures in each of these domains shows in many cases a remarkable similarity, which we plan to stress.

We plan to discuss an application of Resolution of Singularities in construction of analytic parametrizations, as well as some other apparent connections to Singularity Theory (in particular, to the topology and geometry of vanishing cycles).

MATHEMATICAL MODEL OF PLANNING OF LANDS AND DISTRIBUTION OF AGRICULTURAL RESOURCES ON THEM

Yuldashev Z.¹, Ibragimov A.², Kalkhanov P.³, Fayzullaev M.⁴

¹*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, ziyaut@mail.ru*

²*Navoi State Pedagogical Institute, Navoi, Uzbekistan, alim-ibragimov@mail.ru*

³*Nukus State Pedagogical Institute, Nukus, Uzbekistan, kalkhanov@mail.ru*

⁴*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan m.fayz@mail.ru*

It is well known that efficiency of the *agricultural industry* (AI) in many respects depends nowadays on the fullest complying with science based recommendations and also application of information technologies, including methods of mathematical modeling.

Each *subject of agricultural industry* (SAI), namely, individual farmer or community of producers, often called as agricultural firm, both at an initial stage, and in the course of a production cycle arises the problem of rational distribution and use of resources: experts, financial sources, acreage planted, water, fertilizers, equipment. The mathematical models of the industry are always multicomponent, and their purposes have multiple criteria [1].

The state policy in regards of AI, irrespective of form of ownership of production assets, steadily declares the strategic purpose: *the fullest satisfaction of needs of the population for agricultural production, availability, and highest possible level of independence from foreign producers*. The achievement of these strategic objectives is in the first place promoted by development and deployment of the high-tech production technologies in AI promoting minimization of influence of destabilizing factors and stability of growth in general in set of industries. In AI the need of stable growth is dictated by the increasing demographic indicators, migration to mainly developed countries and urbanization.

In this work, for an abstract SAI, the optimizing mathematical model is developed for determination of sizes of acreage and distribution of irrigation resources, namely, irrigation water which in the Central Asian region, along with fertilizers, is considered to be a resource of primary importance in AI. At the same time for the analysis of influence of nondeterministic parameters on dynamics of process methods of the interval analysis are used [2]. The results presented on work of expert system on the basis of the developed algorithm. At that the expert system working in real and interval versions, in the second case, namely at entering of initial interval data provides the upper and lower boundaries of acreage sizes, usage of resources or productivity of a specific agriculture crop.

References

1. Moiseyev N. N. *Mathematical problems of the system analysis*. M.: Science, 1981.
2. Kalmykov S. A., Shokin Yu. I., Yuldashev Z. Kh. *Methods of the interval analysis*. Novosibirsk: Science, 1986. 224 p.

QUALITATIVE ANALYSIS OF THE MATHEMATICAL MODEL OF CARDIAC REGULATORIKA

Yusupova Z. Dj.

*Scientific and Innovation Center for Information and Communication Technologies, Tashkent,
Uzbekistan, zaynabhon@inbox.ru*

Careful study of cardiac activity is a topical issue and a requirement of the present time. Because, the mortality from heart disease is a big problem all over the world. The investigation and study of the cause of arrhythmia in the heart and sudden cardiac death, the search for a pathway to treatment are also continuing. It is known that the possibilities for studying the

regulatory mechanisms of the heart by using physical model are limited, and in such cases, mathematical models are considered as a powerful tool. In the system equations of the model, taking into account biological feedback and delay time in the propagation of electrical impulses in cardiac muscle fibers ensures the adequacy of the model [1-3]. With the laws of regulatorika of the living systems "OrAsta" proposed by the Uzbek scientist B.N.Khidirov [1], we consider following systems of equations of the mathematical model of the heart regulatorika:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{a_1\Theta(t-h)\eta(t-h)}{(1+\sigma_1^2\Theta^2(t-h))(1+\sigma_2^2\eta^2(t-h))} - b_1x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= a_2x(t-h) - b_2y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= a_3x(t-h) - b_3z(t) \\ \frac{d\Theta(t)}{dt} &= a_4y(t-h) - b_4\Theta(t) \\ \frac{d\eta(t)}{dt} &= a_5z(t-h) - b_5\eta(t)\end{aligned}\tag{1}$$

If the solutions of these systems of equations in the range $t = [0, h]$ are given as initial functions $\varphi_i(t)$, $i = 1, \dots, 5$, then solutions of the systems of equations (1) can be found in $t > h$ by using the Bellman-Cook sequential integration method.

Solutions in the range $[0, h]$ are considered as the initial function in $t = (h, 2h]$. Hence, in the range $t = (h, 2h]$ system equations (1) can be written as follows:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{a_1\varphi_4(t-h)\varphi_5(t-h)}{(1+\sigma_1^2\varphi_4^2(t-h))(1+\sigma_2^2\varphi_5^2(t-h))} - b_1x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= a_2\varphi_1(t-h) - b_2y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= a_3\varphi_1(t-h) - b_3z(t) \\ \frac{d\Theta(t)}{dt} &= a_4\varphi_2(t-h) - b_4\Theta(t) \\ \frac{d\eta(t)}{dt} &= a_5\varphi_3(t-h) - b_5\eta(t)\end{aligned}\tag{2}$$

Consistently integrate with the introduction of the following notation:

$$x(t) = Q_1(t)e^{-b_1t}, \quad y(t) = Q_2(t)e^{-b_2t}, \quad z(t) = Q_3(t)e^{-b_3t}, \quad \Theta(t) = Q_4(t)e^{-b_4t}, \quad \eta(t) = Q_5(t)e^{-b_5t}$$

Using (3), we integrate to find solutions in the range $t = (h, 2h]$.

$$Q_1(t) = Q_1(h) + \int_h^t e^{b_1 s} \frac{a_1 \varphi_4(s-h) \varphi_5(s-h)}{(1 + \sigma_1^2 \varphi_4^2(s-h))(1 + \sigma_2^2 \varphi_5^2(s-h))} ds$$

$$Q_2(t) = Q_2(h) + \int_h^t e^{b_2 s} a_2 \varphi_1(s-h) ds$$

$$Q_3(t) = Q_3(h) + \int_h^t e^{b_3 s} a_3 \varphi_1(s-h) ds$$

$$Q_4(t) = Q_4(h) + \int_h^t e^{b_4 s} a_4 \varphi_2(s-h) ds$$

$$Q_5(t) = Q_5(h) + \int_h^t e^{b_5 s} a_5 \varphi_3(s-h) ds$$

The found $Q_i(t)$, $i = 1, \dots, 5$ are rearranged by the expression with (3).

$$x(t) = e^{-b_1 t} \left(\varphi_1(h) e^{b_1 h} + \int_h^t e^{b_1 s} \frac{a_1 \varphi_4(s-h) \varphi_5(s-h)}{(1 + \sigma_1^2 \varphi_4^2(s-h))(1 + \sigma_2^2 \varphi_5^2(s-h))} ds \right)$$

$$y(t) = e^{-b_2 t} \left(\varphi_2(h) e^{b_2 h} + \int_h^t e^{b_2 s} a_2 \varphi_1(s-h) ds \right)$$

$$z(t) = e^{-b_3 t} \left(\varphi_3(h) e^{b_3 h} + \int_h^t e^{b_3 s} a_3 \varphi_1(s-h) ds \right)$$

$$\Theta(t) = e^{-b_4 t} \left(\varphi_4(h) e^{b_4 h} + \int_h^t e^{b_4 s} a_4 \varphi_2(s-h) ds \right)$$

$$\eta(t) = e^{-b_5 t} \left(\varphi_5(h) e^{b_5 h} + \int_h^t e^{b_5 s} a_5 \varphi_3(s-h) ds \right)$$

Thus, (4) is a solution of the systems of equations (1) in the range $t = (h, 2h]$ and is considered as an initial function for the following range $(2h, 3h]$. It is clear that the solutions of the systems of equations (1) exist and are continuous. This method of sequential integration can be used in cases where the initial condition is specified as a function. Conclusion. It is possible to find solutions of the systems of equations (1). But to obtain solutions of these equations by analytical way, calculations are cumbersome. Therefore, it is efficient to apply numerical methods, such as Runge-Kutta. In this case, the development of computer models makes it easier to work. Such simulators provide an opportunity to deeply explore, understand the heart's regulatorika and analyze the states of cardiac activity [1-4].

Reference

1. **Hidirov B. N.** *Selected works on mathematical modeling of living systems regulatorika.*

Moscow, Izhevsk: Institute of Computer Science, 2014, - 300 p.

2. **Hidirova M. B.** *Modeling of mechanisms of cardiac tissue excitement.* Mathematical modeling, 2004. T. 16. No 11. pp 3-14.
3. **Hidirova M. B.** *Biomechanics of cardiac activation: the simplest equations and modelling results.* Russian Journal of Biomechanics, 2001. Vol. 5, No 2: 95-103.
4. **Hidirova M. B.** *Modelling of regulation mechanisms of cardiovascular systems.* Scienticae Mathematicae Japonicae. Vol.8, 2003, pp. 427-432.

HAAR-WAVELET MULTIDIMENSIONAL SIGNAL PROCESSING METHOD

Yusupov I.

Wavelets are used to analyze piece-wise signals. Wavelet coefficients can efficiently represent a signal which has led to data compression algorithms using wavelets. Wavelet analysis is extended for multidimensional signal processing as well. Haar wavelet is a sequence of rescaled "square-shaped" functions which together form a wavelet family or basis. It allows a target function over an interval to be represented in terms of an orthonormal basis. The Haar sequence is now recognised as the first known wavelet basis and extensively used. The technique of construction of multidimensional integrated bilinear basic functions of Haar can be based on idea of integration of piecewise-plane orthogonal basic functions. It shows that how algorithms of fast transformations in bases of orthogonal piecewise-constant functions can be adapted for calculation of factors in piecewise-linear bases. It can be clearly seen that the advantages of Haar is existing methods of fast transformation and compression factors.

Here the compression factor K_c is defined under the formula:

$$K_c = N/(N - N_1)$$

Where: N - quantity of function readouts N_1 - quantity of the zero factors received as a result of Haar and transformations in piecewise - parabolic bases. It allows to receive quantity of zero factors and means receiving high speed in Haar basis and the big compression factor. Also as a result of it is revealed, that with increase of quantity in function readouts N value of factors decreases on exponential law. Digital processing of signals it is important that mathematical operations are performed fast, and the time required for completion of commands must be exactly known beforehand. In digital signal processors the most important mathematic operations and the core of all algorithms of digital processing of signals is multiplication followed

by summation. Fast performance of the multiplication operation followed by summation is very important for implementation of digital real time filters, recovery of signals, multiplication of matrixes, manipulation with graphical images etc. Thus, the offered method is hardware-focused and allows using existing algorithms of fast transformations in bases of orthogonal piecewise-constant functions for calculation of factors for both piecewise-linear and piecewise-quadratic bases.

PIECEWISE-POLYNOMIAL BASIS FUNCTIONS FOR COMPUTING PROBLEMS IN BIOMEDICAL SIGNAL PROCESSING

Zaynidinov H., Yusupov I.

The construction of models for real time-signals can be easily represented in Fourier analysis. Building models for real-time signals has been easy for representation in Fourier analysis. In recent years, the introduction of new algorithms developed specifically for parallel processing architectures, which distribute various tasks to multiple processors, has facilitated fast computation for a variety of research applications. The piecewise-constant basis function has utilized the piecewise-polynomial method with a limited number of values. Orthogonal piecewise-Harmuth basic functions are not suitable for weak convergence of approximation and other DSP applications. Indeed, the existing Cooley-Tukey algorithm has been successfully used to calculate coefficients, but these are restricted to piecewise-constant basis.

Therefore, in this paper, we have proposed a novel scheme of calculating the coefficients in the piecewise-quadratic basis. This fact does not allow the use of piecewise quadratic basis in solving practical problems. The spectral theory of the discrete orthogonal function can be applied to the decomposition of the Fourier series. A simple and effective hardware piecewise-polynomial and piecewise-rational methods are suitable to support a limited number of processors. These studies have also shown that many signals received from actual objects can be easily presented by a set of sine and cosine wave fluctuations. Hence, piecewise-polynomial basis functions are the result of a transformation from time to frequency domain of Fourier analysis. This work analyses the deficiencies of known systems of orthogonal piecewise-polynomial basis functions, which are applied to compute fast spectral transformations. Namely, these deficiencies include weak convergence approximation and discontinuity. The integration features of the systems of *Haar*, *Shauder*, and *Harmuth* functions have been used. The convergence speed of interpolated numbers and their basis have the potential to be applied to fast spectral processing (FSP) algorithms.

The major FSP problem is finding out the thin structure of signals, quickly identifying

local features, forecasting the development of processes, and also, during time aspiration, using a limited number of processing processors in a parallel convey or computing systems, for the purpose of reducing the cost of studies. The signals received from actual objects, traditional harmonious functions, are widely applied to the reconstruction of patterns that explain many signals received from actual objects. These signals could be easily presented by a set of sine wave and cosine fluctuations used by Fourier analysis. The result is transitioning from time to frequency functions, where sine and cosine functions have not been fully represented. The fully functional system of orthogonal functions can be applied to the decomposition in numbers, which correspond to the Fourier series. The elementary functions, which are decisions of the simple differential equations, have very wide application in the field of practical engineering problems. Usually in engineering, this terminology is basically understood as simple functions of one or two variables, with a limited quantity of continuous extremes, and limited steepness within the given change of argument. The function serves as a construct of mathematical models of the signals received from a real-object. In the first case, frequency is defined by the period of transmitted signals, where, particularly in gravimetric prospecting, they lie within the range of a few seconds to about several seconds.

Consequently Fourier transform, the Haar basis gained the attention of experts for two reasons:

- The number of factors necessary for approximation (for a given level of accuracy), in relation to the general number of binary pieces, is reduced, where the absence means long operations in the Haar FT, and only the addition, subtraction, and displacement operations are used.
- The limitation of the Haar basis is the weak convergence of the numbers to constant functions i.e. the necessity of storing several hundreds of factors for many functions, in order to maintain an error level of approximately 0.1

This paper discusses the piece-wise polynomial basis, and analyses the systems of piecewise-constant, piecewise-linear, and piecewise-quadratic basis, and also presents their limitations. To obviate these limitations, we have proposed an algorithm for fast transformations that implement the piecewise-quadratic basis. The proposed algorithm makes it possible to save on the derivative of the memory, which is necessary for the storage of derivative spectral factors during processing. Thus, the processing of any real experimental file saves from 5% to 24% of memory size while during the processing of any elementary function (or function consisting of their combinations) memory saved is the range if 11% to 70%.

References

1. **Moore R. E.** *Interval Analysis*. –Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, 1966.

2. **Kearfott R. B., Nakao M. T., Neumaier A., Rump S. M., Shary S. P., Hentenryck P.** *Standardized notation in interval analysis*. Computational Technologies, 2010. Vol. 15, №1. pp. 7–13.
3. **Shary S. P.** *Finite-dimensional interval analysis*. Institute of Computational Technologies of SB RAS. - Novosibirsk: XYZ publishing, 2010.
4. **Ibragimov A. A.** *Interval iterated methods of solution of the nodal equations of the set modes of electrical networks*. Bulletin of the National university of Uzbekistan, 2010. №3, pp. 87-91.

ШИФРЛАШ АЛГОРИТМЛАРИ УЧУН МАКСИМАЛ ТАРҚАТИШ ХУСУСИЯТИГА ЭГА БЎЛГАН АКСЛАНТИРИШЛАРНИ ИШЛАБ ЧИҚИШ

Абдурахимов Б. Ф., Саттаров А. Б.

Ўзбекистон Миллий университети, Тошкент, Ўзбекистон, asb2602@mail.ru

Маълумки, замонавий блокли симметрик шифрлаш алгоритмлари таркибида икки асосий хусусиятни таъминловчи: аралаштириш ва тарқатиш акслантиришларидан фойдаланилади. Аксарият шифрлаш алгоритмларида “аралаштириш” хусусиятини бажарувчи акслантириш сифатида S-блок жадвалларидан, “тарқатиш” хусусиятини бажарувчи акслантириш сифатида эса циклик суриш, ўрин алмаштириш, фиксрланган матрицага кўпайтириш каби акслантиришлардан фойдаланилган.

Олиб борилган тадқиқотлар натижасида аниқландики, бирор чекли майдонда (масалан Галуа майдони, $GF(2^k)$) MDS (Maximum Distance Separable) туридаги квадрат матрицага кўпайтириш битларни максимал тарқатиш хусусиятига эга бўлади [3].

Элементлари 1 байтдан иборат бўлган 4x4 ёки 8x8 ўлчамли матрицалар реализация учун қулайдир. Шунингдек, 8x8 ўлчамли MDS матрицанинг битларни тарқатиш кўлами 4x4 ўлчамли MDS матрицага нисбатан икки карра катта ҳамда криптобардошлилиги ҳам нисбатан юқори. Шу боис, шифрлаш алгоритмлари таркибида MDS(8,8) матричасидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ.

Таъкидлаш лозимки, SP тармоғига асосланган алгоритмларнинг шифрлаш ва дешифрлаш жараёнларида фойдаланилувчи акслантиришларнинг бир хиллиги алгоритмнинг қулай реализацияси учун хизмат қилади. Шифрлаш жараёнида MDS(8,8), дешифрлаш жараёнида $MDS^{-1}(8,8)$, яъни тескари матрицадан

фойдаланилади. Олиб борилган таҳлил натижалари шуни кўрсатадики, ўзи-га ўзи тескари бўлган матрицалар (*Инволютив*) мавжуд. Демак, яратилувчи $MDS(8,8)$ матрица инволютив бўлиши мақсадга мувофиқ.

Ишлаб чиқилувчи матрицани MDS тоифасидаги матрица бўлишлигини аниқлашда қуйидаги теоремадан фойдаланиш мумкин [2].

Теорема. $T(k,k)$ матрица $MDS(k,k)$ матрица ҳисобланади, фақат ва фақат $T(k,k)$ матрицанинг барча қисм матрицалари махсусмас (*non-singular, невырожденная*) матрица (яъни детерминант нулдан фарқли) бўлса.

Демак, матрица қандай ёндашув асосида ишлаб чиқилмасин, агар у теорема шартини қаноатлантирса MDS матрица ҳисобланади. Бироқ, олиб борилган тадқиқот натижасида аниқландики, инволютив матрица бўлишлигини таъминлаш учун “Адамар” (*Hadamard*) [1] матрицасидан фойдаланиш қулай ҳисобланади.

Адамар матрицаси асосида инволютив матрицани ишлаб чиқишда қуйидагича ёндашиш мумкин.

Айтайлик умумий ҳолда қуйидаги $H(4,4)$ – Адамар матрицаси берилган:

$$H(4,4) = \begin{bmatrix} a, b, c, d \\ b, a, d, c \\ c, d, a, b \\ d, c, b, a \end{bmatrix} \quad (0)$$

Ушбу белгилашга мувофиқ, $H(4,4) \cdot H(4,4)$ матрица қиймати бирор $GF(2^q)/\varphi(x)$ майдонда қуйидагича ҳосил бўлади:

$$H(4,4) \bullet H(4,4) = \begin{bmatrix} a^2 \oplus b^2 \oplus c^2 \oplus d^2, 0, 0, 0 \\ 0, a^2 \oplus b^2 \oplus c^2 \oplus d^2, 0, 0 \\ 0, 0, a^2 \oplus b^2 \oplus c^2 \oplus d^2, 0 \\ 0, 0, 0, a^2 \oplus b^2 \oplus c^2 \oplus d^2 \end{bmatrix} \quad (0)$$

Агар (1) тенгликдаги “ d ” элемент қиймати учун $d = a \oplus b \oplus c \oplus 1$ бўлса, у ҳолда $H(4,4) \cdot H(4,4) = E(4,4)$ тенглик ўринли бўлади, яъни $H(4,4)$ матрица инволютив ҳисобланади. Мазкур хусусият ихтиёрий ўлчамдаги Адамар матрицаси учун бажарилади. Демак, сатр элементлари сони k та бўлган Адамар матрицасини бирор элементини қолган элементлар орқали ифодалаш орқали инволютив матрица қуриш мумкин.

Матрицага кўпайтириш акслантиришининг тезкор бўлишлигини таъминлаш учун, кўпайтириш жараёнидаги амаллир сони энг кам бўлган $MDS(8,8)$ матрицани шакллантириш лозим ҳисобланани. Одатда, $GF(2^q)/\varphi(x)$ майдонидаги элементларни кўпайтиришда ундаги амаллар сони талаб этилувчи “XOR” амаллари сони билан ўлчанади (ҳисобланади)

ва шартли равишда “XORлар сони” деб юритилади.

Таъриф [4]. Бирор $GF(2^q)/\varphi(x)$ майдонда аниқланган a элементнинг XORлар сони деб, уни ушбу майдонда аниқланган ихтиёрий b элементга кўпайтириш учун талаб этилбувчи XOR амаллари (2 модуль бўйича қўшиш) сонига айтилади.

Мазкур таъриф асосида матрицанинг k та элементдан иборат бўлган бирор сатрига кўпайтириш натижасида битта элементни ҳисоблаш учун талаб этилувчи XORлар сонини (XOR_{Matrix} орқали белгилаймиз) аниқлаш формуласи қуйида келтирилган:

$$XOR_{Matrix} = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_k) + (n - 1) \bullet q \quad (0)$$

бу ерда: γ_i – сатрдаги i -элементнинг XORлар сони, n – сатрдаги нол бўлмаган элементлар сони, q – чекли майдон ўлчови.

Одатда XOR_{Matrix} қиймати кичик бўлган матрицаларни “*Енгиш*” (Lightweight) матрица деб ҳам юритилади [4].

Демак, шакллантирилувчи MDS(8,8) матрица энгил бўлиши лозим бўлиб, XOR_{Matrix} параметр қиймати қаралаётган $GF(2^q)/\varphi(x)$ майдон кўпхадига узвий боғлиқдир.

Юқорида билдирилган фикрлар ва MDS матрицага қўйилган талаблардан келиб чиқиб, экспериментал тадқиқот натижасида инволютив ва қолган матрицаларга нисбатан энг энгил (тезкор) бўлган MDS(8,8) матрицалар $GF(2^8)/x^8 \oplus x^7 \oplus x^6 \oplus x \oplus 1$ – майдонда ишлаб чиқилди. Ушбу ишлаб чиқилган энг энгил MDS(8,8) матрицалар қуйида келтирилган бўлиб, улар учун $XOR_{Matrix}=102$ ўринли.

$$1) \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 112, 145, 225 \\ 2, 1, 4, 3, 112, 5, 225, 145 \\ 3, 4, 1, 2, 145, 225, 5, 112 \\ 4, 3, 2, 1, 225, 145, 112, 5 \\ 5, 112, 145, 225, 1, 2, 3, 4 \\ 112, 5, 225, 145, 2, 1, 4, 3 \\ 145, 225, 5, 112, 3, 4, 1, 2 \\ 225, 145, 112, 5, 4, 3, 2, 1 \end{bmatrix} \quad 2) \begin{bmatrix} 1, 2, 4, 8, 14, 112, 145, 225 \\ 2, 1, 8, 4, 112, 14, 225, 145 \\ 4, 8, 1, 2, 145, 225, 14, 112 \\ 8, 4, 2, 1, 225, 145, 112, 14 \\ 14, 112, 145, 225, 1, 2, 4, 8 \\ 112, 14, 225, 145, 2, 1, 8, 4 \\ 145, 225, 14, 112, 4, 8, 1, 2 \\ 225, 145, 112, 14, 8, 4, 2, 1 \end{bmatrix}$$

Шифрлаш жараёнида қайта ишланаётган маълумотларни элементлари 1 байтдан бўлган матрица шаклида ифодалаб, ушбу матрицани юқорида келтирилган MDS матрицага кўпайтириш натижасида 64 бит маълумотнинг максимал тарқалиши ва ўзаро аралашуви таъминланади.

Адабиётлар

1. **Kishan Chand Gupta, Indranil Ghosh Ray.** *On Constructions of Involutionary MDS Matrices.* In AFRICACRYPT, pages 43-60, 2013.

2. MacWilliams F., Sloane N. *The theory of error-correcting codes*. North-Holland Mathematical Library, vol. 16, pp. 762, 1977.
3. Malik M. Y., No J. *Dynamic MDS Matrices for Substantial Cryptographic Strength*. Seoul National University. 2011.
4. Siang Meng Sim, Khoongming Khoo, Frederique Oggier, Thomas Peyrin. *Lightweight MDS Involution Matrices*. pp. 38.

БЕТАВОЛЬТАИЧЕСКИЙ ИСТОЧНИК ПИТАНИЯ ДЛЯ ПЕЙСМЕЙКЕРОВ

Акимченко А. А.¹, Гурская А. В.¹, Долгополов М. В.², Кузнецов О. В.¹

¹Самарский университет, Самара, Россия, electron97@rambler.ru

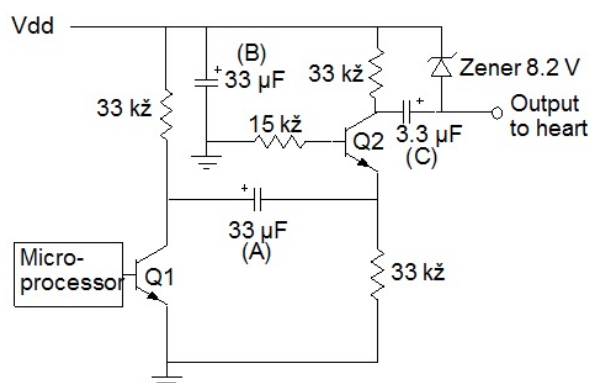
²Научно-технологический парк «Авиатехнокон», Самарский университет, Самара, Россия, mikhaiddolgorolov68@gmail.com

Первый и единственный опыт использования коммерчески успешного кардиостимулятора с бетавольтаической батареей относится к 1970-м годам в США. Ларри Олсен с коллегами создали Betacel – кардиостимулятор с источником питания на Рm-147 с периодом полураспада 2.6 года [2]. К 1973 году было имплантировано около 60 таких кардиостимуляторов. Однако из-за негативного отношения общественности к радиоактивным изотопам и скорого появления литий-ионных батарей, которые показывали более высокую эффективность и могли дольше питать кардиостимулятор, Betacel потеряла популярность.

На сегодняшний день актуальными являются бетавольтаические источники на тритии и на никеле-63, однако тритиевые батареи не подойдут для кардиостимулятора, так как их жизненный цикл сопоставим с жизненным циклом литий-ионных батарей. Таким образом, для кардиостимулятора подойдут батареи на никеле-63 (полураспад 100 лет) и углероде-14 (полураспад 5700 лет).

Кардиостимулятор состоит из источника питания, генератора импульсов, контура вывода, материнской платы, на которой находятся микропроцессор и различные сенсоры, и защитного корпуса. Источник питания кардиостимулятора питает микропроцессор, сенсоры, и контур вывода, который создает электрические импульсы, стимулирующие сердце. Сигнал подачи импульса приходит от микропроцессора, который постоянно отслеживает информацию о работе сердца при помощи сенсоров. Если сердце бьется слишком быстро, слишком медленно или нерегулярно, генератор импульсов создает электрический импульс,

который идет по электродам в сердце. Электроды помещаются в сердце через вену. Современные кардиостимуляторы также могут увеличивать ритм сердца во время физических нагрузок. Для этого применяются пьезоэлектрические датчики, которые реагируют на вибрацию мышц, или акселерометры. На рисунке, как пример, представлена упрощенная основная схема контура кардиостимулятора с униполярным выходом [3].



Источник питания в кардиостимуляторе должен удовлетворять следующим требованиям: напряжение 2.8 В, минимальное напряжение материнской платы 2.2 В, необходимый ток для материнской платы 10 мкА, минимальная емкость 2 А·ч [4].

Бетавольтаические источники питания полностью отвечают этим требованиям, но при этом имеют намного большую удельную энергию. Также они абсолютно безопасны для организма, так как бета-электроны имеют очень малую глубину проникновения и не могут вылететь за пределы корпуса стимулятора.

Существует ряд способов применения бетавольтаических источников питания в кардиостимуляторах. Первый способ заключается в замене литий-ионной батареи в кардиостимуляторе на бетавольтаический источник. Плюсом данного способа является компактность, поскольку бетавольтаический источник имеет небольшие размеры, и его легко уместить в корпус кардиостимулятора без изменения конструкции. Однако в этом способе имеются некоторые трудности: современные бетавольтаические источники не могут обеспечить достаточной мощности и стабильного постоянного тока для одновременной зарядки конденсатора и питания управляющей схемы кардиостимулятора.

Второй способ заключается в одновременном использовании литий-ионной батареи и бетавольтаического источника. Литий-ионная батарея будет питать управляющую схему и заряжать конденсаторы в генераторе импульсов, а бетавольтаический источник будет подключен к литий-ионной батарее через контроллер заряда, и будет осуществлять капельную подзарядку батареи. Капельная – подзарядка аккумулятора малым током для компенсации саморазряда или разрядки на малую внешнюю нагрузку. Обычно этот метод

зарядки используется для свинцово-кислотных аккумуляторов для продления их срока службы, однако может быть использован и для литий-ионных аккумуляторов. Поскольку литий-ионные аккумуляторы чувствительны к перезарядке, необходимо осуществлять капельную подзарядку через контроллер заряда. В кардиостимуляторе постоянная капельная подзарядка литий-ионного аккумулятора значительно повысит его жизненный цикл. Плюсом данного способа является отсутствие необходимости изменения конструкции кардиостимулятора - необходимо только немного увеличить корпус, чтобы в него поместились две батареи и контроллер заряда. Минусом является увеличение размеров кардиостимулятора, что может усложнить его имплантацию. Однако, учитывая размер бетавольтаических источников питания и контроллера заряда, увеличение корпуса будет незначительным. Необходимо лишь сделать небольшой контроллер заряда.

Таким образом, отметим в заключение, что одновременное использование литий-ионной батареи и бетавольтаического источника в пейсмейкерах кардиостимуляторов является наиболее перспективным вариантом.

Литература

1. **Katz D., Akiyama T.** *Pacemaker longevity: The World's Longest-Lasting VVI Pacemaker*. Annals of Noninvasive Electrocardiology, 2007, Volume 12, Issue 3, pp 223-226.
2. **Патент US3706893 А**
3. **Laudon Michael K.** *Pulse output*. Design of cardiac pacemakers. New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1995.
4. **Venkateswara Sarma Mallela, Pankumaran V., Srinivasa N. Rao.** *Trends in Cardiac Pacemaker Batteries*. Indian Pacing Electrophysiol J., 2004, Volume: 4, Issue 4, pages 201-212.

ДИРИХЛЕ L - ФУНКЦИЯСИНИНГ КОМПЛЕКСНОЛЛАРИ ТЎҒРИСИДА

Аллаков И., Собиров А.

Термиз давлат университети, Термиз, Ўзбекистон, iallakov@mail.ru

Мақолада $\chi(\text{mod } q)$ – комплекс характер бўлган Дирихле L – функцияси $L(s, \chi)$ тривиал бўлмаган ноллари мавжуд бўлмаган соҳанинг чегарасида қатнашувчи доимийнинг сон қиймати аниқлаштирилган.

Фараз этайлик, n – натурал сон, $s = \sigma + it$ комплекс сон, $chi - q$ модули бўйича Дирихле характери бўлсин. Маълумки, Дирихле L – функцияси $L(s, \chi)$, $Res > 1$ бўлганда

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

тенглик билан аниқланади. Бу функциянинг барча комплекс ноллари $\sigma = \frac{1}{2}$ тўғри чизиқда ётади деган гипотеза мавжуд бўлиб у ҳозирча тўлиқисботланмаган. Лекин сонлар назариясининг ҳозиргача ҳал этилмаган кўпчилик масалалари шу гипотеза билан боғлиқ[1].

Аввало, $L(s, \chi)$ функциянинг барча комплекс нолларининг $0 < \sigma < 1$ йўлакда жойлашгани ва улар $\sigma = \frac{1}{2}$ га ва ҳақиқий ўққа нисбатан симметрик жойлашгани исботланган. Кейинчалик бу аниқлаштирилиб

$$\sigma > 1 - \frac{c}{\log(|t| + 3)}, \quad q \geq 3, \quad t - \text{ихтиёрий ҳақиқий сон} \quad (1)$$

соҳада Дирихле L – функциясининг ноллари мавжуд эмас эканлиги исботланди [2]. Шунинг учун Дирихле L – функциясининг комплекс ноллари тўғрисидаги изланишлар муҳим ҳисобланади. (1)-натижа Пейдж ва Кнаповскийларга тегишли бўлиб, ундаги ўзгармаснинг сон қиймати И.Аллаков [3] томонидан аниқланган.

Ушбу иш $\chi(\text{mod } q)$ комплекс характер бўлганда (1) даги c ўзгармаснинг сон қийматини аниқлашга бағишланган бўлиб, унда аввало c нинг бошқа параметрлар билан боғлиқ формуласи

$$c = c(t_0) = 2 \left\{ 1 + \left(\gamma_0 + \frac{1}{2t_1} + \frac{1}{12t_1^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4,1209}{t_1^2}} \right) \mathcal{L}_1^{-1} \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\gamma_0 + \frac{1}{2t_2} + \frac{1}{12t_2^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4,1209}{t_2^2}} \right) \mathcal{L}_2^{-1} \right\} \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln t_1} \right)$$

келтириб чиқарилган. Бу ерда $t_1 = t_0 + 3$, $\mathcal{L}_1 = \ln(t_0 + 3)$ ва $t_2 = 2t_0 + 3$, $\mathcal{L}_2 = \ln(2t_0 + 3)$, $t \geq t_0$, γ_0 – Эйлер доимийси.

Бундан фойдаланиб қуйидаги теорема исботланган:

Теорема. Агар $\chi(\text{mod } q)$ комплекс характер бўлса, у ҳолда унга мос Дирихле L – функцияси $L(s, \chi)$

$$\sigma \geq 1 - \frac{0,0119126}{\ln q(|t| + 3)}, \quad q \geq 3, \quad t - \text{ихтиёрий,}$$

соҳада ноллари мавжуд эмас. Бу теорема [3] даги натижанинг аниқлаштирилганидир.

Фараз этайлик P етарлича катта натурал сон ва $q \leq P$ бўлсин. У ҳолда

$$-Re \frac{L'}{L}(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos(t \ln n - \omega(n))$$

бўлади. Теоремани исботлашда [2] даги сингари йўл тугилади ва

$$3 \left\{ -\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_0) \right\} + 4 \left\{ -Re \frac{L'}{L}(\sigma + it, \chi) \right\} + \left\{ -Re \frac{L'}{L}(\sigma + 2it, \chi^2) \right\} \geq 0$$

муносабатдан ҳамда қуйидаги икки тасдиқдан фойдаланилади.

1. Агар $q < \sigma < 1, 03$ бўлса,

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) < \frac{1}{\sigma - 1} + 0,1856352(\sigma - 1) < \frac{1}{\sigma - 1}$$

бажарилади. Бунда $\gamma_0 = 0,57721566\dots$ – Эйлер доимийси.

2. $x \geq 1$ бўлса,

$$\sum_{n < x} \frac{1}{n} < \ln x + \gamma_0 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{12x^2}$$

тенгсизлик ўринли.

Адабиётлар

1. **Davenport Harold.** *Multiplicative Number Theory.*.. New York, Heidelberg, Berlin. Second edi. 1997, 178p.
2. **Карацуба А. А.** *Основы аналитической теории чисел.* -М.:Наука, 1983, -240 с.
3. **Аллаков И.** *Сонлар назариясининг баъзи аддитив масалаларини аналитик усуллар билан ечиш.* -Т , "Таълим" 2012, 200б.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Алоев Р. Д., Худойберганов М. У., Мингбаева А., Бомуродов Ш.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, aloev@mail.ru

Рассматриваются гиперболические системы линейных законов сохранения в римановых инвариантах:

$$\mathbf{R}_t + \Lambda \mathbf{R}_x = 0, t \in [0, +\infty), x \in [0, L], \quad (1)$$

где $\mathbf{R} : [0, +\infty) \times [0, L] \rightarrow R^n$. Λ – диагональная матрица и определяется следующим образом

$$\Lambda \triangleq \begin{pmatrix} \Lambda^+ & 0 \\ 0 & \Lambda^- \end{pmatrix} \text{ с } \begin{cases} \Lambda^+ = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}, \\ \Lambda^- = \text{diag}\{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}, \end{cases} \quad \lambda_i > 0 \forall i. \quad (2)$$

Введем в рассмотрение следующие обозначения $\mathbf{R}^+ = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix}$ и $\mathbf{R}^- = \begin{pmatrix} R_{m+1} \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$

такие что $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^+ \\ \mathbf{R}^- \end{pmatrix}$.

Тогда систему (1) можно переписать в виде

$$\partial_t \begin{pmatrix} \mathbf{R}^+ \\ \mathbf{R}^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda^+ & 0 \\ 0 & \Lambda^- \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \mathbf{R}^+ \\ \mathbf{R}^- \end{pmatrix} = 0. \quad (3)$$

Наша задача заключается в исследовании устойчивости разностных схем для этой системы с линейными граничными условиями в канонической форме

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}^+(t, 0) \\ \mathbf{R}^-(t, L) \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \mathbf{R}^+(t, L) \\ \mathbf{R}^-(t, 0) \end{pmatrix} \text{ с } \mathbf{K} \triangleq \begin{pmatrix} K_{00} & K_{01} \\ K_{10} & K_{11} \end{pmatrix}, t \in [0, +\infty), \quad (4)$$

и с начальным условием

$$\mathbf{R}(0, x) = \mathbf{R}_0(x), x \in (0, L). \quad (5)$$

Корректность смешанной задачи (1-5), а также её устойчивости доказаны в работах [1,2].

В настоящее время все больше применяют методы математического моделирования для описания различных реальных физических явлений.

Будем понимать под математическим моделированием следующую цепочку отображений: физическая модель явления — математическая модель явления — вычислительная модель явления — программа, ЭВМ.

На наш взгляд, правильное применение методов математического моделирования, невозможно без детального анализа соотношения между математической и вычислительной моделями явлений.

Почти все физические задач трехмерные и очень затруднительны в решении из-за их нелинейности. По существу к решению каждой задачи подходят индивидуально, круг ее решений сужают и упрощают или делают более частный подход к решению конкретной задачи.

В настоящей работе нами исследуются устойчивость ряда классических и современ-

ных разностных схем, которые применяются для численного решения смешанной задачи (1-5).

Следует сказать, что в теории дифференциальных уравнений уже давно существует подход одновременного изучения исходной математической задачи и ее конечно-разностного аналога. Здесь уместно вспомнить основополагающую работу Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики // Успехи математических наук., а также монографии Годунов С.К. Уравнения математической физики, Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, Блохин А.М. Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики, в которых этот подход находит свое воплощение. В основу конструирования и исследования вычислительных моделей мы положим требование адекватности вычислительной модели исходной дифференциальной задаче. Под адекватностью мы будем понимать следующее: вычислительная модель строится так, чтобы с ее помощью можно было бы доказать теорему существования решения исходной дифференциальной задачи. Последнее обстоятельство представляется чрезвычайно важным фактом, поскольку при численных расчетах мы должны быть уверены в том, что приближенное решение действительно стремится в пределе к решению исходной дифференциальной задачи.

Литература

1. **Bastin G., Coron J-M.** *Stability and Boundary Stabilization of 1-D Hyperbolic Systems.* Springer International Publishing Switzerland, 2016, 284 pp.
2. **Годунов С. К.** *Уравнения математической физики.* М.:Наука, 1971, 416 с.

СХЕМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Арипов М.¹, Утебаев Д.²

¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
mirsaidaripov@mail.ru

²Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан
dutebaev_56@mail.ru

Многие прикладные задачи механики сплошной среды связаны с необходимостью постановки и численного решения обратных задач. Численное решение обратных задач

в основном связаны с возмущением исходной задачи с переходом к новой корректной задаче. Один из таких методов является метод квазиобращения. В работе рассматривается следующая ретроспективная обратная задача нестационарной теплопроводности:

$$c(x)\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0, \quad x \in \Omega = \{x | x = (x_1, x_2), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\} \quad (1)$$

с некоторыми краевыми и начальными условиями.

Для решения обратной задачи (1) рассматривается один вариант метода квазиобращения, связанная с переходом к псевдопараболическому уравнению, т.е. приближенное решение обратной задачи (1) определяется из уравнения

$$c(x)\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - L_\alpha u + \alpha L \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega, 0 < t \leq T, \quad (2)$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями. Здесь $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Аппроксимируя пространственные переменные в (2) на основе метода конечных элементов или метода конечных разностей получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D \frac{dv_h(t)}{dt} + Av_h(t) = 0, \quad u_h(0) = u_{0,h}, \quad (3)$$

где $v_h(t)$ — элемент конечномерного пространства, $H_h \forall t$; $D = b(x)E + \alpha\Lambda$, $A = -\Lambda$ — операторы из H_h в H_h (в методе конечных элементов им соответствуют матрицы массы и жесткости). Здесь $b(x) = c(x)$, $x \in \omega$ — сетка по пространству, $\Lambda = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha$, $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha^* > 0$.

Для решения задачи (3) применяется многопараметрическая двухслойная разностная схема метода конечных элементов четвертого порядка точности по времени:

$$D \frac{\hat{y} - y}{\tau} - \frac{\tau^2}{12} A \frac{\hat{y} - \dot{y}}{\tau} + A \frac{\hat{y} + y}{2} = \varphi_1, \quad \gamma D \frac{\hat{y} - \dot{y}}{\tau} + \alpha A \frac{\hat{y} - y}{\tau} + \beta A \frac{\hat{y} + \dot{y}}{2} = \varphi_2, \quad (4)$$

где $\varphi_1 = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt$, $\varphi_2 = \frac{12}{\tau^3} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) (s_1 v_2^{(1)} + s_2 v_2^{(3)}) dt$, $s_1 = 15\gamma - 35\alpha/3$, $s_2 = 140\gamma - 350\alpha/3$, $v_2^{(1)} = t - (t_n + \tau/2)$, $v_2^{(3)} = \tau(\xi^3 - 3\xi^2/2 + \xi/2)$, $\xi = (t - t_n)/\tau$.

Построенная схема (4) подчиняются условию четвертого порядка аппроксимации по времени $\alpha + \beta = \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma = O(\tau^2)$. В работе получены априорные оценки в различных нормах. Кроме того, доказаны сходимость схемы (8) при сильных и слабых предположениях о гладкости решений исходной дифференциальной задачи.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ СЕКЦИОННОЙ КРИВИЗНЫ МНОГООБРАЗИИ $S^3 \times R$

Аслонов Ж. О.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, jasurbek05@mail.ru

В теории многообразий гладкие римановы многообразия делятся на два класса: секционная кривизна которых $K_\sigma \leq 0$ и, $K_\sigma > 0$ соответственно. Исследования этих многообразий упрощается, если учесть изоморфность R^n и многообразий нулевой кривизны, S^n и многообразий положительной кривизны, S^n и многообразий отрицательной кривизны. Таким образом, секционная кривизна играет важную роль при исследовании геометрии многообразий.

Риманова метрика, являющаяся одновременно и лево- и правоинвариантной, называется биинвариантной. Такие метрики существуют не на всех группах Ли. Имеет место следующая

Теорема. На каждой компактной группе Ли существует хотя бы одна биинвариантная риманова метрика.

Далее приведем свойства биинвариантных метрик в виде теорем \square .

Теорема 1. Для биинвариантной метрики на группе Ли G и любых левоинвариантных векторных полей X, Y, Z на группе Ли G $\langle X, [Y, Z] \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle$.

Теорема 2. Для левоинвариантных векторных полей X, Y связность Леви-Чивита биинвариантной римановой метрики на группе Ли G имеет вид $\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y]$.

Теорема 3. Для биинвариантной метрики на группе Ли G секционная кривизна в точке $p \in G$ в направлении $\sigma = X_p \wedge Y_p$ выражается формулой

$$K_\sigma(X_p \wedge Y_p) = \frac{1}{4} \frac{\langle [X, Y], [X, Y] \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \Big|_p,$$

где X, Y - левоинвариантные векторные поля.

Известно, что множество всех гладких векторных полей на гладком многообразии со скобкой Ли образуют алгебру Ли и для каждого диффеоморфизма $\varphi : M \rightarrow M$ верно $[d\varphi X, d\varphi Y] = d\varphi [X, Y]$.

Рассмотрим теперь $SO(n)$ - группа вещественных ортогональных $(n \times n)$ матриц с условием $\det A \neq 0$. Секционная кривизна группы Ли $SO(n)$ выражается следующим

образом [3]:

$$K_\sigma = \frac{1}{4} \frac{\sum_{i<j} \left(\sum_k x^{ik} y^{kj} - \sum_k y^{ik} x^{kj} \right)^2}{\sum_{i<j} (x^{ij})^2 \sum_{i<j} (y^{ij})^2 - \left(\sum_{i<j} x^{ij} y^{ij} \right)^2}.$$

В частности, для $SO(3)$, например, $K_\sigma = \frac{1}{4}$.

Введем на касательной пространстве $T_E SO(3)$ базис следующим образом

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это базис является ортонормированным и скобка Ли базисных элементов определяем таблицей

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2.$$

Если сопоставить базису X_1, X_2, X_3 базисные векторы $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 1\}$ в R^3 , то линейный изоморфизм между $T_E SO(3)$ и R^3 оказывается изометрией.

Рассмотрим трехмерную сферу S^3 радиуса 2 со стандартной римановой метрикой. Векторы X_1, X_2, X_3 в стандартной метрике сферы S^3 образует ортонормированный базис в $T_e S^3$, а как левоинвариантные поля - ортонормированный базис для любой точки S^3 . При этом скалярное произведение $\langle X, Y \rangle_p = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3$, для любых $X, Y \in T_e S^3$, таких, что

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3, \quad Y = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3.$$

Введем на S^3 новую метрику \ll, \gg следующим образом

$$\ll X, Y \gg = \frac{1}{3} \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3.$$

Отличие метрики \ll, \gg от стандартной состоит в том, что каждое касательное пространство "сжимается" в направлении вектора X_1 .

Рассмотрим группу Ли $G = S^3 \times R$ с метрикой прямого произведения сферы и прямой. Эта метрика биинвариантна. Алгебра Ли группы G получается из алгебра Ли группы S^3 добавлением к базису X_1, X_2, X_3 касательного к R единичного вектора X_4 , для которого при всех i выполняется равенства $[X_i, X_4] = 0$. Полученный базис является ортонормированным.

На группе G рассмотрим векторные поля $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} X_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} X_4$, $Z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} X_4$.

Пусть $\pi : G \rightarrow S^3 \times \{0\}$ проектирование вдоль интегральных кривых векторного

поля Z_2 . Сферу $S^3 \times \{0\}$ с метрикой \ll, \gg обозначим через M . При этом отображение $\pi : G \rightarrow M$ является римановой субмерсией, где поле Z_1 - горизонтальное, а поле Z_2 - вертикальное, так что

$$|d\pi Z_1| = |Z_1| = 1, \quad |d\pi Z_2| = 0.$$

Поскольку $X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Z_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}Z_2$ то $|d\pi X_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

С помощью формулы О'Нейла вычислим секционную кривизну K_σ многообразия M . Пусть $X, Y \in T_p M$ примем

$$X = \sqrt{3}\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3, \quad Y = \sqrt{3}\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3,$$

так что $|X \wedge Y|_M^2 = \langle \langle X, X \rangle \rangle \langle \langle Y, Y \rangle \rangle - \langle \langle X, Y \rangle \rangle^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2$, где $\nu_1 = \lambda_2 \mu_3 - \lambda_3 \mu_2$, $\nu_2 = \lambda_3 \mu_1 - \lambda_1 \mu_3$, $\nu_3 = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$.

Горизонтальными подъемами векторных полей X, Y в G являются векторные поля

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_1 X_4, \\ \bar{Y} &= \mu_1 Z_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mu_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \sqrt{\frac{2}{3}}\mu_1 X_4 \end{aligned}$$

Их скобка Ли $[\bar{X}, \bar{Y}] = \nu_1 X_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\nu_2 X_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\nu_3 X_3$ и вертикальное составляющая $[\bar{X}, \bar{Y}]^V = -\sqrt{\frac{2}{3}}\nu_1 Z_2$.

Секционная кривизна K_σ многообразия M для $\sigma = X \wedge Y$ равна

$$\begin{aligned} K_\sigma &= \frac{k(X, Y)}{|X \wedge Y|_M^2} = \frac{k(\bar{X}, \bar{Y})_G + \frac{3}{4}([\bar{X}, \bar{Y}]^V)_G^2}{|X \wedge Y|_M^2} = \\ &= (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)^{-1} \left(\frac{1}{4} [\bar{X}, \bar{Y}]_G^2 + \frac{3}{4} ([\bar{X}, \bar{Y}]^V)_G^2 \right) = \\ &= \frac{\left(1 + 3\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right) \nu_1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 (\nu_2^2 + \nu_3^2)}{4(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)} = \frac{9\nu_1^2 + (\nu_2^2 + \nu_3^2)}{12(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что секционная кривизна K_σ удовлетворяет неравенство $\frac{1}{12} \leq K_\sigma \leq \frac{3}{4}$.

Литература

1. **Кобаяси Ш., Номидзу К.** *Основы дифференциальной геометрии*. М.: Наука, 1981, Т.1.
2. **Бессе А.** *Многообразия Эйнштейна*. М.: Мир, 1990, 318с.
3. **О'Neill В.** *Semi-Riemannian geometry (with applications to relativity)*. N.Y., etc.: Acad. Press, 1983, 468 p.

СПЛАЙН-ФУНКЦИЯ ЁРДАМИДА ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Бахромов С. А.

Ўзбекистон Миллий университети, Тошкент, Ўзбекистон

Математик физиканинг кўплаб масалалари чизиқли интеграл тенгламаларга келтирилади. Интеграл тенгламаларни ҳар доим ҳам берилган талаблар асосида аниқечимини топиб бўлавермайди. Шунинг учун ҳам интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш фан ва техниканинг ривожланишида ҳам амалий ҳам назарий жиҳатдан долзарб масалалардан ҳисобланади.

Қуйида интеграл тенгламани бирор квадратур формула ёрдамида тақрибий ечишга асосланган усулини кўриб чиқамиз.

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i) + R(F) \quad (1)$$

бунда $x_i \in [a, b]$ кесма нуқталари абциссалари, A_i квадратур формуланинг сонли коэффицентлари, $R(F)$ - квадратур формуланинг қолдиқҳади.

Интеграл тенгламани тақрибий ҳисоблашда фойдаланиладиган тугун нуқталар тенг узоқликда жойлашган ҳолларда интерполяцион квадратур формулалар, яъни тўртбурчалар, трапеция ва Симпсон квадратур формулаларини қўллаш мумкин.

Ушбу ишда асосан сплайн-функциялар асосида қурилган квадратур формулалар ёрдамида қуйидаги

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x) \quad (2)$$

иккинчи турдаги Фредгольм интеграл тенгламаси тақрибий ечиш усулини қараймиз.

Бизга 2-чи тур Фредгольм интеграл тенгламаси (2) берилган бўлсин. бу ерда $K(x, t)$ ва $f(x)$ функциялар керакли тартибгача ҳосилалари узлуксиз. λ — берилган сон. Интеграллаш оралиғи $x \in [a, b]$ -ни n та бўлакка бўлиб h — қадамни $h = \frac{b-a}{n}$ топиб оламиз. h — қадам ёрдамида тугун нуқталарни аниқлаймиз $x_i = a + i \cdot h$, $i = \overline{1, n}$. Бу тугун нуқталардан фойдаланиб қуйидагиларни аниқлаймиз

$y(x_i) = y_i$, $K(x_i, x_j) = K_{i,j}$, $f(x_i) = f_i$ ($i, j = \overline{1, n}$) формулага асосан

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j \cdot K_{i,j} \cdot y_j = f_i + R_i \quad (3)$$

эга буламиз, (3) системада R_i ни ташлаб юбориб $y(x)$ ечимнинг x_i ($i = \overline{0, n}$) тугун нуқта-

лардаги y_i тақрибий қийматлар учун чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j \cdot K_{i,j} \cdot y_j = f_i \quad (i = \overline{0, n}) \quad (4)$$

ушбу системани тақрибий ечиш учун Крониккернинг ушбу $\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$ белгисини ишлатиб (4) системасини қуйидагича ёзамиз

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{i,j} - A_j K_{i,j}) y_j = f_i \quad (i = \overline{0, n}); \quad (5)$$

Агар (5) да $\Delta(\lambda) = \det(\delta_{i,j} - \lambda A_j K_{i,j}) \neq 0$, у холда (5) система ягона ечимга эга. Системани ечиб y_i ($i = \overline{1, n}$) ларни топиб $y(x)$ ечим учун (2) тенгламадан тақрибий аналитик ечимни оламиз

$$y(x) = f(x) + \lambda \cdot \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, x_j) y_j \quad (6)$$

Ушбу ишда қаралаётган 2 - тур Фердгольм интеграл тенгламани интерполяцион кубик сплайн функция ёрдамида тақрибий ечамиз ва бунинг натижасида олинган натижалар тўғри тўртбурчаклар ва трапециялар квадратур формулалари ёрдамида олинган натижалардан яхши эканлиги кўрсатилади.

ОБОБЩЕННОЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Бешимов Г. Р.

Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан,
gayrat.92@mail.ru

В работе [1], [2] введены понятия обобщенного топологического пространства (generalized topological space – GTS). Пусть X — непустое множество и множество всех подмножеств X обозначим через $p(X)$. Семейство μ подмножество $p(X)$ назовем обобщенной топологией на X , если $\emptyset \in \mu$ и произвольное объединение элементов μ снова принадлежит μ . Тогда пара (X, μ) называется обобщенным топологическим пространством. Элементы μ назовем μ -открытым множеством.

Ясно, что всякое топологическое пространство является GTS пространством, но обратное не всегда верно.

Пример. 1) Пусть $X = \{a, b, c\}$. Через μ обозначим подмножества множества X , т.е.

$\mu = \{\emptyset, a, b, \{a, b\}\}$. Ясно, что (X, μ) есть GTS пространством, но не является топологическим пространством, так как $X \notin \mu$.

2) Пусть $X = R$ — числовая прямая. Рассмотрим следующие подмножества $\mu = \{\emptyset, (-\infty, b), (a, \infty), R\}$, где $a < b$, $a, b \in R$. Ясно, что (R, μ) есть GTS пространство, но не является топологическим пространством, так как пересечение $(-\infty, b) \cap (a, \infty) = (a, b) \notin \mu$.

Теорема. Пусть X — GTS пространство. Тогда произведение X^n также является GTS пространством.

Литература

1. Csaszar A. *Generalized continuity*. Acta Math. Hungar., 2002, 96: 351-357.
2. Csaszar A. *Modification of generalized topologies via hereditary classes*. Acta Math. Hungar., 2007, 115: 29-36.
3. Abdo Qahis, Takashi Noiri. *Functions and weakly μ H-compact spaces* European Journal of Pure and Applied Mathematics, 2017, Vol.10., No.3, 410-418.

ФУНКТОР РАДОНОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ OS_R

Бешимов Р. Б.¹, Мамадалиев Н. К.²

¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, rbeshimov@mail.ru

²Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан, nodir_88@bk.ru

В работе вводится функтор OS_R полуаддитивных радоновых функционалов в категорию тихоновских пространств $Tych$, который продолжит функтор $OS: Comp \rightarrow Comp$ полуаддитивных функционалов. Доказывается, что функтор $OS_R: Tych \rightarrow Tych$ нормален в категории тихоновских пространств $Tych$.

Напомним, что ковариантный функтор $F: Comp \rightarrow Comp$ называется нормальным, если он непрерывен, сохраняет вес, пересечения и прообразы, мономорфен, эпиморфен и переводит одноточечное пространство в одноточечное, а пустое множество — в пустое [1].

Напомним определение нормального функтора, действующего в категорию тихоновских пространств.

Определение 1. Ковариантный функтор $F: Tych \rightarrow Tych$, действующий в категорию тихоновских пространств называется нормальным, если он:

- 1) переводит одноточечное пространство в одноточечное, а пустое множество — в пустое;

- 2) сохраняет пересечения замкнутых подмножеств тихоновского пространства;
- 3) сохраняет прообразы;
- 4) мономорфен (сохраняет вложения);
- 5) эпиморфен (переводит сюръективное отображение в отображение с всюду плотным образом);
- 6) сохраняет вес тихоновских пространств;
- 7) непрерывен в смысле обратных спектров.

Пусть X — компакт. Через $C(X)$ обозначим пространство всех непрерывных функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ с обычными (поточечными) операциями и суп-нормой, т.е. с нормой $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in X\}$. Для каждого $c \in \mathbb{R}$ через c_X обозначим постоянную функцию, определяемую по формуле $c_X(x) = c, x \in X$. Пусть $\varphi, \psi \in C(X)$. Неравенство $\varphi \leq \psi$ означает, что $\varphi(x) \leq \psi(x)$ для всех $x \in X$.

Функционал $\nu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ называется:

1. слабо аддитивным, если для всех $c \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$ выполняется равенство $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c \cdot \nu(1_X)$;
2. сохраняющим порядок, если для функций $\varphi, \psi \in C(X)$ из $\varphi \leq \psi$ вытекает $\nu(\varphi) \leq \nu(\psi)$;
3. нормированным, если $\nu(1_X) = 1$;
4. положительно-однородным, если $\nu(\lambda \varphi) = \lambda \nu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X), \lambda \in \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$;
5. полуаддитивным, если $\nu(f + g) \leq \nu(f) + \nu(g)$ для всех $f, g \in C(X)$.

Через $OS(X)$ обозначается [2] множество всех положительно-однородных полуаддитивных функционалов из $O(X)$. Множество $OS(X)$ снабжается топологией поточечной сходимости.

Пусть теперь X — тихоновское пространство и $C_b(X)$ — пространство всех непрерывных ограниченных функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ с обычными (поточечными) операциями и суп-нормой, т.е. с нормой $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in X\}$.

Определение 2. Функционал $\mu \in OS(\beta X)$ называется радоновым, если $\mu(\varphi_\alpha) \rightarrow 0$ для любой направленности $\{\varphi_\alpha\} \subset C(\beta X)$, равномерно стремящейся к нулю на компактах из X и состоящей из функций, ограниченных в совокупности.

Для тихоновского пространства X через $OS_R(X)$ обозначим множество всех радоновых функционалов $\mu \in OS(\beta X)$. В $OS_R(X)$ рассматривается индуцированная из $OS(\beta X)$ топология. Заметим, что конструкция $OS_R(X)$ порождает ковариантный функтор в категории *Tych* тихоновских пространств.

Теорема 1. *Функтор $OS_R: Tych \rightarrow Tych$ нормален.*

Литература

1. **Fedorchuk V. V., Filippov V. V.** *General topology. Basic constructions.* Moscow: Fizmatlit, 2006, 332 p.
2. **Davletov D. E., Djabbarov G. F.** *Functor of semiadditive functionals.* Methods of Functional Analysis and Topology., 2008, Vol. 14, No. 4, pp. 314-322.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ "PiPO" ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И ПРОФИЛАКТИКИ ОСЛОЖНЕНИЙ У БОЛЬНЫХ С СОЧЕТАННОЙ ТРАВМОЙ КОСТЕЙ ЛИЦЕВОГО СКЕЛЕТА

Боймурадов Ш. А., Юсупов Ш. Ш.

Ташкентская медицинская академия, Ташкент, Узбекистан, shoha_03@mail.ru

В современных условиях развития общества повышение качества оказания медицинской помощи имеет исключительно важное социальное значение. Научно-технический прогресс и вся совокупность современных общественных отношений предъявляют все более высокие технические, профессиональные, морально - этические и правовые требования к специалистам в сфере здравоохранения[1]. Несмотря на значительный прогресс в развитии челюстно-лицевой хирургии вопросы прогнозирования и профилактики осложнений у больных с сочетанной травмой костей лицевого скелета не теряют своей актуальности. Совершенствование методов диагностики и прогнозирования в челюстно - лицевой хирургии требует внедрения в практику более информативных и эргономичных методик, что стало возможным благодаря компьютерным технологиям[2].

Нами разработанная программа "PiPO" , которая предназначена для прогнозирования и профилактики осложнений у больных с сочетанной травмой костей лица и непосредственно может быть использована следующими специалистами: челюстно-лицевой хирург, травматолог, нейрохирург и специалист экстренной медицинской помощи. Также она предназначена для обследования больных с данной патологией[3].

Программа "PiPO" разработана с использованием языка VISUAL BASIC 6.0 в системе MS OFFIS ACCESS 2010. Программа функционируют в среде WINDOWS XP, WINDOWS 7 и WINDOWS 8 на компьютерах любой конфигурации. Программа является программным комплексом, состоящим из нескольких частей, обозначенных строками

главного меню. Первая строка главного меню "Регистрация пациентов" позволяет вызвать форму "Карта" для занесения данных субъективного исследования и объективного осмотра. Данные берутся в основном из справочников и при необходимости заносятся вручную. Просмотреть все справочники можно с помощью кнопки "Справочники" в Главном меню. В справочниках "Артериальное давление" "Тахипноэ" "Кровопотеря" задаются граничные значения для каждого из видов алгоритмов оказания помощи, поэтому в форме "Карта" эти значения заносятся вручную. Справочники можно дополнять и изменять. При нажатии кнопки "Выборка по заданным параметрам" в форме Главное меню открывается форма "Карта" выбор данных можно производить по "Номеру карты по "Фамилии по "Датам и предварительному диагнозу". Форма Карта содержит кнопку "Алгоритм оказания помощи после нажатия которой выдастся алгоритм один из трех, данных в приложении, это: "Алгоритм оказания помощи в проведении лечебно-диагностических мероприятий больным с сочетаниями травм лицевого скелета с компенсированным общим состоянием" "Алгоритм оказания помощи в проведении лечебно-диагностических мероприятий больным с сочетаниями травм лицевого скелета с субкомпенсированным общим состоянием" "Алгоритм оказания помощи в проведении лечебно-диагностических мероприятий больным с сочетаниями травм лицевого скелета с декомпенсированным общим состоянием". Программа использует диалоговый режим работы с пользователем, начиная с главного меню, сопровождая работу пользователя подсказками и промежуточными простыми меню для подтверждения решения пользователя.

Таким образом, применение программы "PiPO" дадут возможность проведения медицинской реабилитации в зависимости от тяжести общего состояния больных и локализации перелома костей лицевого скелета для выбора комплексного лечения больных.

Литература

1. **Набиев Ф. Х., Даминов Р. О., Либин П. В., Филиппов К. В.** *Комплексный подход к лечению больных с зубочелюстными аномалиями, сопровождающимися функциональными нарушениями и эстетическими деформациями носа.* *Стоматология.* М., 2013, №6, с.47-53.
2. **Инкарбеков Ж. Б., Кастей Р. М., Аманжалов А. К., Майликбаева А. К.** *Сочетанные повреждения костей средней зоны лица с черепно-мозговой травмой: алгоритмы диагностики и лечения.* *Вестник АГИУВ.,* 2013, №4, с.85-89.
3. **Боймурадов Ш. А., Юсупов Ш. Ш.** *Прогнозирование и профилактика осложненных у больных с сочетанной травмой костей лицевого скелета.* *Агентство по интеллектуальной собственности Республики Узбекистан: Свидетельство об официальной регистрации программы для электронно-вычислительных машин No DGU 04023 -*

2016.04/10.

ЕМКОСТИ В КЛАССЕ α - СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**Вайсова М. Д.***Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан, v_mohira@mail.ru*

Пусть α – строго положительная, замкнутая дифференциальная форма бистепени $(n-1, n-1)$, с бесконечно гладкими коэффициентами, тогда $dd^c u \wedge \alpha$ является эллиптическим оператором второго порядка с бесконечными гладкими коэффициентами.

Определение 1. *Дважды гладкая в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция $u(z) \in C^2(D)$ называется α -гармонической, если $dd^c u \wedge \alpha = 0$ в D .*

Определение 2. *Функция $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ заданная в области $D \subset \mathbb{C}^n$ называется α -sh функцией в D если:*

1) *она полунепрерывна сверху в D , т.е.*

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z^0} u(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{B(z^0, \varepsilon)} u(z) \leq u(z^0);$$

2) *обобщенная функция (поток)*

$$[dd^c u \wedge \alpha](\omega) = \int u \wedge \alpha \wedge dd^c \omega, \forall \omega \in F(D),$$

положительна, т.е. $[dd^c u \wedge \alpha](\omega) \geq 0, \forall \omega \geq 0$. Здесь $F(D)$ – пространство основных финитных функций.

Класс α -гармонических и α -субгармонических функций обозначаются, соответственно, через $\alpha-h(D)$, $\alpha-sh(D)$. Заметим, что для $\alpha = (dd^c |z|^2)^{n-1}$ мы будем иметь гармонические и субгармонические функции (см.[1]). Из теории эллиптических операторов следует, что в пространстве $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ существует фундаментальное решение $K_\alpha(z, w)$ относительно фиксированной точки $w \in \mathbb{C}^n$: $dd^c K_\alpha \wedge \alpha = \delta_w(z)$, где $\delta_w(z)$ – мера Дирака в точке w и причем $K_\alpha(z, w)$ является бесконечно гладким вне $z = w$ (см. [2,3]).

Определение 3. *Функция*

$$U_\alpha^\mu(z) = \int K_\alpha(z-w) d\mu(w)$$

называется α -потенциалом меры μ . Некоторые свойства α -субгармонических функций и α -потенциалов изучены в работе [4].

C_α -емкость

Определение 4. Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ -компактное подмножество. Следующая величина

$$C_\alpha(K) = \sup \{ \mu(K) : \text{supp } \mu \subset K, U_\alpha^\mu(z)|_K - 1 \}$$

называется α -емкостью компакта K .

Для произвольного множества $E \subset \mathbb{C}^n$ определим внутреннюю емкость $\underline{C}_\alpha(E)$ формулой

$$\underline{C}_\alpha(E) = \sup_{K \subset E} C_\alpha(K), \quad K \text{—компакт,}$$

и внешнюю емкость $\overline{C}_\alpha(E)$ формулой

$$\overline{C}_\alpha(E) = \inf_{G \supset E} \underline{C}_\alpha(G), \quad G \text{—открытое множество.}$$

Если $\underline{C}_\alpha(E) = \overline{C}_\alpha(E)$, то множество E будем называть C -измеримым (измеримым по емкости) и писать $C_\alpha(E)$ вместо $\overline{C}_\alpha(E)$ и $\underline{C}_\alpha(E)$.

Основными результатами данной работы являются следующие

Теорема 1. Пусть $E \subset \mathbb{C}^n$ произвольное множество. $C_\alpha(E) = 0$ тогда и только тогда, когда существует $u(z) \in \alpha\text{-sh}(\mathbb{C}^n)$ функция такая, что $u(z) \not\equiv -\infty$, $u|_E = -\infty$.

Теорема 2. Для любых строго положительных, замкнутых дифференциальных форм α_1 и α_2 бистепени $(n-1, n-1)$, с бесконечно гладкими коэффициентами емкости C_{α_1} и C_{α_2} одновременно обращаются в нуль, т.е. $C_{\alpha_1}(E) = 0 \Leftrightarrow C_{\alpha_2}(E) = 0$.

Литература

1. Уэрмер Дж. Теория потенциала. Москва, МИР, 1980, с. 134.
2. Алимов Ш. А. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций. Дифференц. уравнения, 1972, том (8), с. 1609-1626.
3. Хёрмандер Л. О средних Рисса спектральных функций эллиптических дифференциальных операторов и соответствующих спектральных разложениях. Математика(Сб. переводов), 1968, том (12) N5, с. 91-130.
4. Ваисова М. Д. Теория потенциала в классе α -субгармонических функций. Узбекский математический журнал, 2016, том (N3), с. 46-52.

КАРТА НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК НЕЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ СИМПЛЕКСА НА СЕБЯ

Ганихаджаев Р. Н.¹, Таджиева М. А.², Эшимбетов М. Р.³

¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
rganikhodzhaev@gmail.com

²Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, mohbonut@mail.ru

³Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан,
eshimbetov1989@mail.ru

Пусть на симплексе $S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) : \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^m$ задано отображение

$$x'_k = x_k (1 + f_k(x)), \quad k = \overline{1, m} \quad (1)$$

где $f_k(x)$ непрерывно дифференцируемые функции удовлетворяющие условиям:

1. $f_k(x) = f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m)$
2. $f_k(x) \geq -1$ для всех $x \in S^{m-1}$, причем, если $x_k > 0$, то $f_k(x) > -1$
3. $\sum_{k=1}^m x_k \cdot f_k(x) = 0$, при $x \in S^{m-1}$.

Отображение (1) при выполнении условий 1) - 3) является обобщением дискретной модели Лотки—Вольтерры.

Пусть $V(x) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$.

Утверждение 1. $V(S^{m-1}) = S^{m-1}$, т.е. $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ является сюръективным отображением.

Пусть $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $\alpha \subset I$, $\alpha \neq \emptyset$, и $\Gamma_\alpha = \{x \in S^{m-1} : x_i = 0, \forall i \notin \alpha\}$ — грань симплекса S^{m-1} . Легко заметить, что любая грань симплекса вполне инвариантна, т.е. $V(\Gamma_\alpha) = \Gamma_\alpha$. В частности все вершины симплекса являются неподвижными точками для V .

Теорема 1. $P = \{x \in S^{m-1} : f_i(x) = 0, i = \overline{1, m}\} \neq \emptyset$.

Следствие. Множество P состоит из неподвижных точек.

Двойственным образом $Q = \{x \in S^{m-1} : f_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}\} \neq \emptyset$ также состоит из неподвижных точек. Пусть $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ и $\text{supp}F(x) = \{i \in I : f_i(x) \neq 0\}$ носитель F в точке x . Очевидно, если $x \in \text{Fix}V$, то $\text{supp}x \cap \text{supp}F(x) = \emptyset$.

Теорема 2. Если $x \in \text{Fix}V$ и

$$\text{supp}x \cap \text{supp}F(x) = \emptyset = I, \quad (2)$$

то x изолированная неподвижная точка гиперболического типа.

Следствие. Если выполняется условие (2), то множество неподвижных точек $Fix V$ конечно.

Пусть Γ_α грань симплекса S^{m-1} , V_α -сужение V на Γ_α , P_α и Q_α соответствующие неподвижные точки.

Предположив, что условие (2) выполнено отметим все неподвижные точки V в виде точек на плоскости, затем определив все P_α и Q_α соединим их стрелкой идущей от P_α к Q_α .

Определение. Полученный ориентированный граф называется картой неподвижных точек отображения V и обозначается через G_V . Карта неподвижных точек даёт достаточную информацию об асимптотическом поведении траекторий отображения V .

Теорема 3. Если V_1 и V_2 отображения вида (1) и топологически сопряжены, то их карты изоморфны.

Литература

1. **Holmgren R. A.** *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Springer - Verlag New York, 1994, ст. 214.
2. **Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.** *Динамика одномерных отображений*. Киев наука думка 1989, ст. 218.

ПОТЕНЦИАЛ ХИГГСА В НЕМИНИМАЛЬНОЙ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Голенев Е. А., Гурская А. В., Долгополов М. В., Рыкова Э. Н.

Лаборатория математической физики, Самарский университет, Самара, Россия,
mikhaildolgoplov68@gmail.com

Работа посвящена исследованию фазового перехода в рамках суперсимметричных расширений стандартной модели (МССМ, НМССМ и ОМССМ) при дополнительных условиях нарушения симметрий и температурных поправках. Классическая картина бариогенезиса в теориях Великого объединения претерпела сильные изменения с уточнением и развитием теории Стандартной модели (СМ), фазовой диаграммой электрослабого взаимодействия и экспериментальными данными по физике бозона Хиггса [1]. В связи с этим

обсуждаются особенности бариогенезиса и фазового перехода, в том числе, в моделях с расширенным скалярным сектором при конечных температурах. Подчеркивается значение феноменологии расширений скалярного сектора СМ для электрослабого фазового перехода. В докладе приводится краткое описание исторического развития соответствующих вопросов, перечислены основные сценарии бариогенезиса и перспективы их исследования. Рассматриваются основные критические предсказания для исследования свойств сектора Хиггса.

В предшествующих работах авторы рассматривали общий скалярный сектор Хиггса [2-7], в том числе, с нарушением CP -инвариантности и температурными поправками. Также были развиты методы расчета температурных интегралов [6] для управляющих параметров потенциала Хиггса. В настоящее время (особенно после открытия частицы-кандидата на роль бозона Хиггса) у минимального расширения скалярного сектора все меньше шансов реализоваться, поэтому важную роль играют исследования неминимальных расширений. Определены условия для эффективного потенциала модели НМССМ, которые приводят к сильному фазовому переходу первого рода, необходимому для генерации наблюдаемой барионной асимметрии. При этом дополнительное киральное поле играет роль стабилизирующей пены для фазового перехода. Продолжено исследование скалярного сектора методами теории катастроф [3, 8].

Особенность предстоящих исследований заключается в том, что имеющиеся нарушения симметрии и температурные вклады в части самодействия потенциала Хиггса оказывают влияние на темный сектор суперсимметричных моделей, что может иметь следствия для космологии, то есть существенно менять массы частиц холодной темной материи, интенсивности ее взаимодействия с другими частицами и способность к участию в электрослабых распадах, в том числе, и в распадах бозона Хиггса. Результаты исследований потенциала поля Хиггса в случае CP -нарушения и температурных поправок планируется применить для расчетов физических параметров темного сектора. Также, будет рассмотрена аннигиляция нейтралино в рамках квантовой теории поля совместно с фейнмановским диаграммным подходом с учетом однопетлевых поправок. Проведена оценка возможности существования экзотических (темных) звезд, реконструкция численными методами систем дифференциальных уравнений для моделирования внутреннего строения звезды из вырожденного фермионного газа.

Построен однопетлевой эффективный температурный потенциал НМССМ, включающий поправки типа собственной энергии (т.е. поправки к массовым параметрам размерности 2 двухдублетного хиггсовского потенциала). Определены массовые состояния и однопетлевые поправки в безразмерные параметры эффективного потенциала в рамках неминимальной суперсимметричной модели (НМССМ). Исследован общий случай для расчетов однопетлевых диаграмм с различными массами в теории поля при конечных тем-

пературах, предложены различные представления в виде бесконечных рядов и обобщенной функции Гурвица. Получены аналитические выражения для однопетлевых амплитуд типа собственной энергии в предельных случаях высоких и низких температур. Исследуются поверхности стационарных точек в пространстве фоновых полей и матрица устойчивости [9], в том числе при отличии физического базиса от предела СМ. В докладе будут представлены первая и вторая дифференциальные формы для эффективного потенциала. Будут показаны сценарии стационарных точек, экстремальных кривых и поверхностей на основе определения базисов Гребнера [3].

Литература

1. Казаков Д. И. Хиггсовский бозон открыт. Что дальше? Успехи физических наук. 2014. Т. 184. № 9. с. 1004-1016.
2. Долгополов М. В., Рыкова Э. Н. Ограничения на электрослабый бариогенезис в моделях с расширенным сектором Хиггса. Ядерная физика. 2009. Т. 72. № 1. с. 181-185.
3. Долгополов М. В., Заводов С. П., Петрова Е. Ю. Бифуркационные наборы расширенного потенциала Хиггса. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 4(33) (2013), с. 173-183.
4. Борисов А. О., Долгополов М. В., Рыкова Э. Н. Сценарии бариогенезиса в суперсимметричных расширениях стандартной модели. Известия Самарского научного центра РАН. 2008, Т.10. № 3. с. 753-761.
5. Долгополов М. В., Дубинин М. Н., Рыкова Э. Н. Критические параметры температурной эволюции двухдублетного потенциала МССМ. Ядерная физика. 2010. Т. 73, № 6. С. 1069-1073.
6. Dolgoplov M. V., Gurskaya A. V., Rykova E. N. *Finite-Temperature Higgs Potentials*. EPJ Web of Conferences. 2016. Vol. 125. 02006. 11 p.
7. Gurskaya A. V., Dolgoplov M. V., Rykova E. N. *Higgs bosons in standard model extensions*. Physics of Particles and Nuclei, September 2017, Volume 48, Issue 5, pp 822-826.
8. Dubinin M. N., Petrova E. Yu. *High-temperature Higgs potential of the two-doublet model in catastrophe theory*. Theoretical and Mathematical Physics. 2015. V.184, Issue 2, P. 1170-1188.

9. Долгополов М. В., Долгополов Н. М. *Бифуркационные наборы в неминимальной суперсимметрии*. Проблемы современной топологии и ее приложения: Матер. науч. конф. (г. Ташкент, 11-12 мая 2017 г.). Ташкент, 2017. С. 173-175.

ЭФФЕКТИВНО РАВНОМЕРНАЯ ОТДЕЛИМОСТЬ ВЫЧИСЛИМЫХ СЕЧЕНИЙ НЕГАТИВНЫХ ПЛОТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

Дадажанов Р. Н.¹, Касымов Н. Х.²

¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
dadajonovrn@mail.ru

²Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, nadim59@mail.ru

С неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в [1–4]. Под словом сечение понимается дедекиндово сечение линейного порядка.

Теорема 1. *Для любого негативного плотного линейного порядка существует эффективная процедура, сопоставляющая всякой паре различных элементов этого порядка вычислимую щель, отделяющую эти элементы.*

Таким образом, в негативных плотных линейных порядках для любой пары различных элементов отделяющая их вычислимая щель не просто существует, но, более того, разрешающий алгоритм соответствующей щели дается равномерно эффективной процедурой по данной паре элементов.

Дадим точное определение вычислимого семейства вычислимых сечений негативного линейного порядка.

Пусть χ – фиксированная вычислимая нумерация семейства всех одноместных частично вычислимых функций. Например, если k – бинарная клиниевская функция, универсальная для класса унарных частично вычислимых функций (т.е. семейство одноместных частично вычислимых функций есть множество объектов $\{\lambda x.k(x, n) | n \in \omega\}$), то можно положить $\chi(n) = \lambda x.k(x, n)$.

Определение 1. *Нумерация γ семейства вычислимых сечений \mathfrak{R} негативного линейного порядка называется вычислимой, если существует такая вычислимая функция f , что $\gamma = \chi f$ (т.е. по любому γ -номеру сечения эффективно определяется некоторый его χ -номер, являющийся индексом характеристической функции нижнего класса данного сечения).*

Семейство вычислимых сечений негативного линейного порядка называется вычислимым, если существует его вычислимая нумерация.

Неформально, вычислимость семейства вычислимых сечений означает перечислимость алгоритмов разрешения для сечений данного семейства.

Назовем семейство вычислимых щелей негативного линейного порядка относительно полным, если любая пара различных элементов этого порядка отделяется подходящей щелью из данного семейства.

Следствие 1. *Для всякого негативного плотного линейного порядка существует вычислимая (даже негативная) нумерация относительно полного семейства вычислимых щелей.*

Множество всех пар различных по модулю негативной эквивалентности натуральных чисел перечислимо. Сопоставляя каждой такой паре индекс характеристической функции нижнего класса отделяющей их щели получим искомую вычислимую нумерацию. В действительности, всякая такая вычислимая нумерация будет негативной, т.к. для двух различных сечений гарантированно найдется элемент, принадлежащий верхнему классу для одного из этих сечений и нижнему классу – для другого. Детали мы опускаем.

Определение 2. *Вычислимым пополнением негативного плотного линейного порядка называется множество всех вычислимых щелей (индексов вычислимых характеристических функций их нижних классов) данного порядка.*

Упомянутая в следствии 1 относительно полная система отделяющих вычислимых щелей негативного плотного линейного порядка далеко не исчерпывает всего разнообразия вычислимых сечений, что обосновывает введение данного определения.

В связи с теоремой 1, согласно которой существует относительно полная система отделяющих вычислимых щелей, задаваемая равномерно эффективной процедурой, возникает естественный и принципиальный вопрос об алгоритмической природе совокупности всех вычислимых сечений негативного плотного линейного порядка.

Определение 3. *Семейство \mathfrak{R} вычислимых сечений нумерованного линейного порядка называется продуктивным, если существует эффективная процедура, позволяющая по каждому вычислимому подсемейству $\mathfrak{R}_0 \subseteq \mathfrak{R}$ строить вычислимое сечение из $\mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}_0$.*

Следующее утверждение постулирует эффективную неисчерпаемость семейства вычислимых сечений произвольного плотного негативного линейного порядка.

Теорема 2. *Семейство всех вычислимых сечений негативного плотного линейного порядка является продуктивным.*

Следствие 2. *Множество всех вычислимых сечений произвольного негативного плотного линейного порядка не является вычислимым.*

Литература

1. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. *Конструктивные модели*. Новосибирск, Научная книга, 1999, 360 с.
2. Ершов Ю. Л. *Проблемы разрешимости и конструктивные модели*. М., Наука, 1980, 416.
3. Мальцев А. И. *Конструктивные алгебры, I*. Успехи мат. наук, 1961, 16, No. 3, 3-60.
4. Касымов Н. Х. *Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры*. Успехи мат. наук, 1996, 51, No. 3, 145-176.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ КЛЕТОЧНОГО АВТОМАТА С ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Евсютин. О. О.¹, Кабулов А. В.², Мещеряков Р. В.¹

¹Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники,
Томск, Россия, eoo@keva.tusur.ru

²Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
electron-intellect@rambler.ru

В данной работе представлены результаты исследования алгоритма непрерывной оптимизации, основанного на математической модели клеточного автомата с целевой функцией [1]. Данный алгоритм относится к классу метаэвристик, представителями которого являются такие методы и алгоритмы, как генетический алгоритм [2], метод роя частиц [3], дифференциальная эволюция [4] и т.д. Основная особенность исследуемого алгоритма заключается в использовании динамики клеточного автомата для поиска оптимума пространстве решений. Для этого в модель клеточного автомата включается целевая функция, глобальный оптимум которой необходимо найти. Модифицированная клеточно-автоматная модель получила название клеточного автомата с целевой функцией.

Определение 1. Назовем клеточным автоматом с целевой функцией совокупность компонентов $\langle Z^n, \mathbf{L}, A, \mathbf{Y}, \sigma, U, \Phi \rangle$, где Z^n - это пространство целочисленных координат клеток решетки; $\mathbf{L} = (\ell_1, \dots, \ell_n), \ell_i > 0, i = \overline{1, n}$ - вектор, задающий размеры решетки; Эффективность оптимизации с помощью введенной клеточно-автоматной модели зависит от выбора правила развития. В алгоритме, представленном в [1], используется композиция двух правил развития: в соответствии с первым правилом новое состояние каждой клетки автомата рассчитывается с помощью усреднения состояний хороших клеток окрестности; в соответствии со вторым - элементы вектора, содержащегося в клетке, изменяются

Таблица 2: Результаты экспериментов

на некоторую величину, рассчитываемую на основе значений соответствующих элементов соседних клеток. Данный алгоритм оперирует следующими основными параметрами: размеры двумерной решетки $\mathbf{L}=(l_1, l_2)$, шаблон соседства \mathbf{Y} , параметр правила разметки χ , параметр правила развития γ . В статье [1] представлены результаты экспериментов по нахождению глобальных оптимумов стандартных тестовых функций с использованием одинаковых параметров алгоритма оптимизации для разных функций. Однако лучшего результата можно добиться, если варьировать параметры для разных функций. Соответствующие эксперименты были проведены в рамках настоящего исследования. Их результаты представлены в таблице ниже. Во всех случаях использовался шаблон соседства, соответствующий окрестности Мура размером 3×3 клетки.

Целевая функция [1]	Размер решетки клеточного автомата	Значение μ	Значение ω	Среднее количество оценок функции
ϕ_1	12×12	0,20	1,00	281 372
ϕ_2	10×10	0,15	0,75	183 765
ϕ_3	10×10	0,50	0,70	329 812
ϕ_4	9×9	0,40	0,55	298 439
ϕ_5	10×10	0,10	0,95	357 300
ϕ_6	10×10	0,10	1,00	366 726
ϕ_7	10×10	0,90	0,95	354 832
ϕ_8	9×9	0,30	0,80	190 310
ϕ_9	10×10	0,30	0,80	149 658
ϕ_{10}	9×9	0,50	0,80	125 689

В таблице также приведено усредненное количество оценок целевой функции (для 30 запусков), потребовавшееся на нахождение оптимума или значения, близкого к оптимуму. Можно увидеть, что для различных функций хорошие параметры алгоритма оптимизации разнятся, поэтому оптимизация целевых функций, возникающих в реальных прикладных задачах, требует предварительной настройки алгоритма оптимизации.

Литература

1. **Evsutin O., Shelupanov A., Meshcheryakov R., Bondarenko D., Rashchupkina A.** *The algorithm of continuous optimization based on the modified cellular automaton..* Symmetry, 2016, 8 (9), 1-18.
2. **Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М.** *Генетические алгоритмы: Учебное пособие.* Москва: Физматлит, 2006, 320.

3. **Kennedy J., Ebenhart R.** *Particle Swarm Optimization..* Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks. 1995, 1942-1948.
4. **Storn R., Price K.** *Differential Evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces..* Journal of Global Optimization, 1997, 11, 341-359.

**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОДФУНКТОРА P_f ФУНКТОРА P
ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР ИМЕЮЩИХ КОНЕЧНЫЕ НОСИТЕЛИ НЕ
ОБЛАДАЮЩИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ**

Жураев Т. Ф., Турсунова З. О., Жувонов К. Р.

Ташкентский государственный педагогический университет, Ташкент, Узбекистан,
tursunzhuraev@mail.ru

В данной заметке рассматриваются некоторые геометрические и топологические свойства подфунктора P_f функтора P вероятностных мер в категории $Comp$ компактов и непрерывных отображений в себя. Показывается, что функтор P_f сохраняет слабосчетно-мерные компакты и открыто-порожденные компакты.

Пусть X компакт и $P : Comp \rightarrow Comp$ функтор вероятностных мер. Базу окрестностей на компакте $P(X)$ образуют всевозможные множества вида:

$$O(\mu, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \varepsilon) = \{\mu' \in P(X) : |\mu(\varphi_i) - \mu'(\varphi_i)| \leq \varepsilon, i = \overline{1, k}, \varepsilon > 0, \varphi_i \in C(X)\}$$

Для $n \in \mathbb{N}$ через $P_n(X)$ обозначается подпространство $\{\mu \in P(X) : |supp\mu| \leq n\}$, где $P_1(X) = \delta(X)$ - пространство мер Дирака.

Е.В.Щепин определил один интересный подфунктор P_f функтора P , обладающий следующим свойством [1]:

если носитель меры μ состоит из n точек x_1, x_2, \dots, x_n , то мера по крайней мере одной из этих точек не меньше $1 - \frac{1}{n+1}$.

Очевидно, что для компакта X пространство $P_f(X)$ есть счетное объединение компактов вида $P_{f,n}(X)$, где $P_{f,n}(X) = \{\mu \in P_f(X) : |supp\mu| \leq n\}$ т.е. $P_f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X)$, $P_{f,n}(X) \subseteq P_n(X)$ и $P_{f,1}(X) = \delta(X)$.

Функтор P_f интересен тем, что является нормальным функтором с конечными носителями не имеющими конечной степени.

В работе [2] было определено, что существует открытая клеточно-подобная (все слои стягиваемые) деформационная ретракция $r_f^X : P_f(X) \rightarrow \delta(X)$.

Недостающие определения и факты встречающихся в этой заметке можно найти в работах [1-2].

Полученные следующие результаты:

Теорема 1. *Пространство $P_f(X)$ конечномерно, тогда и только тогда, когда X конечноное множество.*

Теорема 2. *Пространство $P_f(X)$ слабосчетномерно, тогда и только тогда, когда X слабосчетномерно.*

Теорема 3. *Если $P_{f,n}(X) \simeq Q$ и $S(r_{f,n}^X)$ есть Z_∞ множество в $P_{f,n}(X)$, тогда $X \simeq Q$.*

где Q - гильбертов куб, т.е. $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$, $[-1, 1]_i$ - отрезок в R и $S(r_{f,n}^X) = \left\{ \mu \in (r_f^X)^{-1} (r_f^X(\mu)) \neq \mu \right\}$.

Пусть τ - бесконечное кардинальное число. Направленное множество A называется τ - полным, если любая цепь его элементов, содержащая не более чем τ - членов, имеет в A точную верхнюю грань. Непрерывный спектр, заданный на τ - полном направленном множестве, называется τ - полным. Обратный спектр называется τ - спектром, если он τ - полон и веса всех входящих в него пространств не превосходит τ .

Для χ_0 - спектра и χ_0 полноты мы будем употреблять названия сигма спектра и сигма полноты.

Компакт, гомеоморфный предельному пространству некоторого сигма спектра с открытыми проекциями называется открыто-порожденным.

Теорема 4. *Пусть X и Y бесконечные открыто-порожденные компакты без точек счетного характера.*

Компакты X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда пространства $P_{f,n}(X) \setminus \delta(X)$ и $P_{f,n}(Y) \setminus \delta(Y)$ гомеоморфны.

Литература

1. Щепин Е. В. *Функторы и несчетные степени компактов.* Успехи мат. наук. 1981, Т36, вып 3, с. 3-62.
2. Жураев Т. Ф. *Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов.* М.МГУ канд.диссер.1989, с. 90.

ОЦЕНКА ДИНАМИКИ ПРОГРЕССИРОВАНИЯ СТАБИЛЬНОЙ СТЕНОКАРДИИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПРИВЕРЖЕННОСТИ К ТЕРАПИИ БОЛЬНЫХ В КЛИНИЧЕСКОЙ ПРАКТИКЕ: ОТБОР ПРИЗНАКОВ В МОДЕЛЬ ПРОГНОЗА

Икрамов А. А.¹, Азимова Н. А.², Ташкенбаева Н. Ф.², Тригулова Р. Х.²

¹Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан

²АО Республиканский специализированный центр кардиологии МЗ РУз, Ташкент, Узбекистан, raisa_trigulova@mail.ru

Введение. В настоящее время реальный прогноз жизни пациентов со стабильной стенокардией является основой выбора оптимальной тактики лечения, с его “унификацией”, т. е. применением “усредненного” алгоритма лечения. При обсуждении вопросов прогностической ценности различных предикторов неблагоприятного течения и исхода ИБС, следует отметить, что прогностическая ценность параметров существенно повышается при использовании многофакторного подхода к оценке риска и методов математического моделирования [1], которые могут оказать реальную практическую пользу для облегчения процесса принятия клинических решений. При планировании и создании таких моделей следует учитывать два основных аспекта: медицинский (анализируемые признаки или комбинации признаков базы медицинских данных) и математический (способ моделирования).

В рамках инновационного проекта ИСС-2014-5 выполняемого по заданию ГКНТ и МЗ РУз в АО РСЦК созданы и зарегистрированы: электронная база данных “Аналитическая система мониторинга и прогнозирования различных клинических вариантов ИБС “CHD DM2”” №BGU 00314 (Ташкент, 2015 г.), совмещенная с программным продуктом “IBS -15” DGU 01035. Система представляет собой комплекс программных продуктов, предназначенных для выполнения задачи автоматизации процессов мониторинга клинической особенности и лечения пациентов с сахарным диабетом 2 типа (СД 2) и различными клиническими формами ИБС в амбулаторных условиях, на основании оценки динамики течения заболевания, оценка полноты назначения рекомендуемых лекарственных препаратов у пациентов с соответствующими показаниями, а также оценки приверженности новым международным руководствам.

Цель. Проанализировать частоту развития неблагоприятных событий, связанную с приверженностью к приему стандартной терапии у больных с ишемической болезнью сердца в начале исследования и при следующем визите, сопоставить с предтестовой вероятностью (ПТВ [2]), фракцией выброса (ФВ [3]), и Индексом Дьюка [4].

Материал и методы. Из 309 пациентов с ИБС отобран 141 больной комплаентный (К) к терапии (по шкале Мориски-Грина [5] комплаентными считаются больные, набрав-

шие 4 балла). Остальные 168 - некомплаентные (НК). Средний возраст составил 62,8±7,3 лет, документированный ОИМ у 74 (52,5 %), сахарный диабет у 53 (37,6 %), артериальная гипертония у 134 (95 %).

Все пациенты были распределены на 3 группы: 1 — не было необходимости в повторной госпитализации за последние 12 месяцев до 2 визита (Комплаентных n-83 и не комплаентных n-61 соответственно), 2 — повторная госпитализация за последние 12 месяцев (К n- 47 и НК n-88 соответственно), 3 — с летальным исходом (К n- 11 и НК n-18 соответственно). Использовались стандартные статистические методы вычисления среднего значения, среднего отклонения и коэффициент корреляции Пирсона. Результаты и обсуждение. В таблице 1 выведены основные параметры используемые в стратификации риска развития нежелательных событий у К больных.

Таблица 1.

Показатель	1 группа n- 83	2 группа n- 47	3 группа n- 11
Перенесенный инфаркт миокарда	34 (41 %)	33 (70 %)	7 (64 %)
Инсульт	9 (11 %)	7 (15 %)	2 (18 %)
Оценка ПТВ	57,6 ± 19	52,5 ± 12	63,9 ± 24
Фракция выброса	63,3 ± 5	51,8 ± 9	52 ± 10
Индекс Дьюка	4,6 ± 2	3,6 ± 1,2	4 ± 1,6
Частота сердечных сокращений	73,5 ± 8,6	77 ± 11,7	78 ± 6,9
Сывороточный креатинин	89 ± 14,8	106 ± 25,8	126 ± 44,6
Холестерин ЛПНП	121 ± 32	117 ± 38	124 ± 34
Поражение ствола ЛКА > 50 %	5 (6 %)	10 (21 %)	1 (9 %)

В таблице 2 представлен процент приверженности к соблюдению режима приема основных групп рекомендованных препаратов у комплаентных больных.

Таблица 2.

Наименование препарата	1 группа n- 83	2 группа n- 47	3 группа n- 11
Ингибиторы АПФ	44 (53 %)	26 (55 %)	5 (45 %)
Бета-блокаторы	82 (98,8 %)	44 (93,6 %)	10 (91 %)
Петлевые диуретики	24 (29 %)	27 (57 %)	6 (54,5 %)
Антиагреганты	79 (95 %)	37 (78,7 %)	9 (82 %)
Антидепрессанты	9 (10,8 %)	3 (6 %)	1 (9 %)
Статины	73 (88 %)	39 (83 %)	9 (82 %)
Дигидропиридиновые антагонисты кальция	46 (55 %)	21 (44,7 %)	4 (36 %)
Амиодарон	5 (6 %)	13 (27,7 %)	1 (9 %)

Наиболее часто и регулярно используемым является бета-адреноблокаторы, антиагреганты, статины независимо от прогноза течения заболевания. Далее по регулярности следуют диуретики, антагонисты кальция, ингибиторы АПФ.

Выводы.

1. Среди некомплаентных больных летальность выше в 1,6 раза, а частота госпитализаций в течении 12 месяцев в 1,8 раза в сравнении с комплаентной группой пациентов.

2. В группе комплаентных пациентов целевые уровни ЧСС не достигаются, несмотря на 91-98% случаев регулярности приема бета-блокаторов независимо от прогноза течения болезни.

3. Впервые в Узбекистане показана 82-88% приверженность к статинотерапии, что является важным показателем для профилактики развития нежелательных событий. В то же время требует дополнительного анализа факт регулярности приема в 1 и 3 группах (классы статинов и суточные дозы).

Литература

1. **Chambless L.** *Several methods to assess improvement in risk prediction models: Extension to survival analysis..* Statistics in Medicine, 2011, Vol.30, Issue 1, 22-38 pp.
2. **Luscher T. F., Montalescot G., Sechtem U., Achenbach S., Andreotti F., et.al** *ESC guidelines on the management of stable coronary artery disease: The Task Force on the management of stable coronary artery disease of the European Society of Cardiology.* Eur Heart J, 2013, 34 (38), 2949-3003 pp.
3. **Филатов А. А., Крылов В. В.** *Изменение фракции выброса левого желудочка у больных с первичным инфарктом миокарда без зубца q на ЭКГ в зависимости от количественного поражения коронарных артерий и проведения эндоваскулярного лечения.* Международный журнал интервенционной кардиоангиологии. 2011. №24
4. **Fihn et al.** *ACCF/AHA/ACP/AATS/PCNA/SCAI/STS Guideline for the Diagnosis and Management of Patients With Stable Ischemic Heart Disease.* JACC December 18, 2012. Vol. 60, No. 24, 44-164 pp.
5. **Morisky D. E., Green L. W., Levine D. M.** *Concurrent and predictive validity of a self-reported measure of medication adherence.* Med Care. 1986, Jan, 24(1), 67-74 pp.

ПРИНУДИТЕЛЬНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ТОНКО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Имомкулов С. А.¹, Абдикадиров С. М.²

¹Навоийский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан,
sevdiyor_i@mail.ru

²Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан

Тонкой топологией на пространстве \mathbb{C}^n называется слабейшая из топологий, оставляющих плюрисубгармонических функции непрерывными (см. [1]). Тонкая топология порождается множествами вида $\{u(z) < \lambda\}$, $\{u(z) > \lambda\}$, $u \in Psh(\mathbb{C}^n)$.

Тонкой окрестностью точки z^0 называется открытое в тонкой топологии множество $V \subset \mathbb{C}^n$, $z^0 \in V$, для которого дополнение $\mathbb{C}^n \setminus V$ плюриразрежено в точке z^0 , т. е. существует круг $U = U(z^0, r)$ и плюрисубгармоническая в U функция $u \in Psh(\mathbb{C}^n)$:

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z^0, z \in V} u(z) < u(z^0).$$

Компактной тонкой окрестностью точки будем называть компакт вида $\overline{U(z^0, r)} \setminus G$, где $G \subset U(z^0, r)$ - открытое, разреженное множество в точке z^0 .

Определение 1. Функция $f(z)$ называется тонко-аналитической в области $D \subset \mathbb{C}^n$, если

1) она определена почти всюду по емкости в области D , т. е. вне некоторого плюриполярного множества $E \subset D$ она принимает конечное значение;

2) для каждой точки $z^0 \in D \setminus E$, существует компактная тонкая окрестность K точки z^0 , что $f|_K \in R(K)$, т. е. сужение $f|_K$ равномерно на K приближается рациональными функциями.

Определение 2 ([2], стр.223). Область $G \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$ содержащая область $D \subset \mathbb{C}^n$, называется голоморфным расширением последней, если любая голоморфная в D функция продолжается до функции голоморфной в G .

Ясно, что это определение содержательно лишь в пространственном случае. Следующая теорема утверждает, что эффект принудительного продолжения свойственно и в классе тонко-аналитических функций.

Теорема. Если область $G \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$ является голоморфным расширением области $D \subset \mathbb{C}^n$, то всякая тонко-аналитическая в D функция продолжается до функции тонко-аналитической в G .

В случае мероморфных функций аналогичная теорема следует из результата [3] о представлении мероморфной функции в виде отношение двух голоморфных функций.

Литература

1. **Bedford E., Taylor B. A.** *Silov Boundary, and $(dd^c)^n$* . Journal of Functional Analysis, 1987, Vol 72. N2.
2. **Шабат Б. В.** *Введение комплексный анализ. Часть II*. Москва "Наука" 1985.
3. **Kajiwara J.** *On weak Poincare problem*. Mem. Fac. Sci., Kyusyu Univ., 1968, ser. A, 22, p. 9-17.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВДОЛЬ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Имомкулов С. А.¹, Хужамов Ж. У.²

¹Навоийский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан,
sevdiyor_i@mail.ru

²Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан,
jumanazar-1971@mail.ru

Классическая лемма Хартогса (см.[1]) о голоморфном продолжении вдоль фиксированного направления утверждает, что если функция $f(z, w)$ определена в поликруге $U \times \{w : |w| < R\} \subset \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w$, голоморфна в $U \times \{w : |w| < r\}$, $0 < r < R$, и при каждом фиксированном $z \in U$ голоморфна по w в круге $\{w : |w| < R\}$, то она голоморфна в поликруге $U \times \{w : |w| < R\}$ совокупности переменных.

Лемма Хартогса имеет множества различных по характеру обобщений и непосредственно примыкает к тематике, связанной с голоморфными продолжениями по фиксированному направлению.

Дальнейшие результаты в этом направлении содержится в работах Ротштейна [2], М.В. Казаряна [3], А.С. Садуллаева и Е.М. Чирки [4], Т.Т. Туйчиева [5], С.А.Имомкулова и Ж.У.Хужамова [6], С.А.Имомкулова [7] и др.

В работе М.В. Казаряна изучена ситуация, когда функция $f(z, w)$ голоморфная в поликруге $U \times \{w : |w| < R\}$, при каждом фиксированном $z \in U$ продолжается на всю плоскость переменного w до голоморфной функции с единственной особой точкой. Доказано, что в этом случае $f(z, w)$ голоморфно продолжается в область $(U \times \mathbb{C}) \setminus S$, где S -некоторое аналитическое множество.

В работе А.С. Садуллаева и Е.М. Чирки изучены функции с более общими, полярными особенностями при минимальных условиях на множество сечений, вдоль которых есть

такое продолжение. Доказано что, если $f(z, w)$ голоморфная в поликруге $U \times \{w : |w| < R\}$, при каждом фиксированном z из некоторого неплюриполярного множества $E \subset U$ функция переменного w продолжается до функции, на всей плоскости, за исключением некоторого полярного множества особенностей, то $f(z, w)$ голоморфно продолжается в область $(U \times \mathbb{C}) \setminus S$, где S -замкнутое плюриполярное подмножество $U \times \mathbb{C}$.

В этой работе мы изучаем задачу об аналитическом продолжении функции вдоль параллельных алгебраических кривых.

Алгебраическая кривая $A \subset \mathbb{C}^2$ определяется как множество нулей некоторого полинома:

$$A = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 : P(\xi, \eta) = 0\}$$

Множество регулярных точек A^0 алгебраической кривой A , открыто на A , а множество критических точек $A^c = A \setminus A^0$ является дискретным множеством (см. [1],[8],[9]). Алгебраическое множество называется неприводимым, если его нельзя представить в виде объединения отличных от него алгебраических множеств.

Теорема. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ область и A -некоторая неприводимая алгебраическая кривая. Если функция $f(z, w)$ голоморфна в области $D \times V \subset \mathbb{C}_z^n \times A$ и при каждом фиксированном $z^0 \in D$ функция $f(z^0, w)$ переменной w продолжается до функции, голоморфной на всей A , за исключением конечного множества особенностей (из A^0), то $f(z, w)$ голоморфно продолжается в $(D \times A) \setminus S$, где S -некоторое аналитическое подмножество $D \times A$.

Литература

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Часть 2. Москва, Наука, 1985, стр. 464.
2. Rothstein W. Ein neuer Beweis des hartogschen hauptatzes und seine ausdehnung auf meromorphe functionen. Math. Z., 1950, том (53), стр. 84-95.
3. Казарян Н. В. О голоморфном продолжении функций со специальными особенностями в \mathbb{C}^n . ДАН. Арм.ССР., 1983, том (76), стр. 13-17.
4. Садуллаев А. С., Чирка Е. М. О продолжении функций с полярными особенностями. Мат. Сб, 1987, том (132) (174) N3, с. 383-390.
5. Туйчиев Т. Т., Имомкулов С. А. Голоморфное продолжение функций, имеющих особенности параллельных многомерных сечений. ДАН. РУз., 2004, том (N2), с. 12-15.

6. **Imomkulov S. A., Khujamov J. U.** *On holomorphic continuation of functions along boundary sections.* *Mathematica Bohemica.*(Czech Republic), 2005, том (130) 3, с. 309-322.
7. **Имомкулов С. А.** *О голоморфном продолжении функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых.* *Известия РАН. Сер. матем.*, 2005, том (69) N2, с. 125-144.
8. **Стоилов С.** *Теория функций комплексного переменного.* Том 1, Москва, ИЛ., 1962, стр. 416.
9. **Чирка Е. М.** *Комплексные аналитические множества.* Москва, Наука, 1985, стр. 272.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ РАЗРУШЕНИИ ГОРНЫХ ПОРОД

Имомназаров Б.¹, Имомназаров Х.²

¹ *Новосибирский национальный исследовательский государственный университет ,
Новосибирск, Россия*

² *Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского
отделения РАН, Новосибирск, Россия, imom@omzg.sscs.ru*

Техногенное деформирование горного массива вызывает самопроизвольное формирование высоконагруженных зон вокруг создаваемых полостей. Первичное разрушение проводится, целенаправленно, с применением специальных средств, и как следствие, в результате резкого возрастания напряжений на контуре обнажения породного массива, процесс дезинтеграции, одновременно, развивается самопроизвольно во все стороны с различной степенью интенсивности. При этом в глубине массива формируется зональная структура напряженно-деформированного состояния (НДС) вмещающих пород.

Экспериментальное исследование показывает, что вокруг горных выработок возникает зональная периодическая структура в виде чередующихся областей разрушенной и относительно неразрушенной породы [1]. Явление противоречит представлениям классической механики горных пород и массивов [2], согласно которым движение фронта запрельного деформирования (разрушения, дезинтеграции) реализуется от контура выработки вглубь массива с образованием зон пластического, упруго-пластического и упругого состояний горных пород.

Вероятно, впервые эффект наблюдался в золоторудной шахте в Южной Африке [3], [4], затем он был независимо открыт и описан в СССР [1], [5], [6]. Существует большое количество научных работ различных авторов, в которых представлены различные аспекты явления. Известно, что в моделях упругой среды метрический тензор упругих деформаций характеризует энергию деформации и является параметром состояния среды. В процессе неупругой деформации, тензор кривизны, порождающийся метрическим тензором деформации, становится ненулевым. В [7], было предложено рассмотреть тензор кривизны в качестве дополнительного параметра состояния среды, влияющего на его энергию (внутреннюю энергию среды зависит от инвариантов тензора кривизны) и, следовательно, всю динамику деформации.

В [8, 9] получены уравнения, описывающие неупругие деформации с учетом внутренней энергетической зависимости от кривизны, как вычисленной с помощью метрического тензора упругих деформаций. Скалярная кривизна, характеризующая несовместимостью деформаций называется там в качестве параметра разрушения. Авторы решили задачу стационарной деформации вокруг радиальной полости и показали, что напряженное состояние является радиально периодическим. В [10] получена и исследована пространственно-нелокальная модель для неупругой деформации твердых тел. Нелокальность деформации учитывается с помощью дополнительного параметра состояния помимо классических параметров, таких как тензоры напряжений и деформаций. Этот дополнительный параметр является тензор кривизны, выраженный в терминах метрического тензора деформации, и он называется параметром разрушения. В случае малой деформации, это эквивалентно тензору несовместимости Сен-Венана. Изучены термодинамические свойства модели и сформулированы (нестационарные) дифференциальные уравнения для пространственно-нелокальной модели, которая составлена из уравнений динамической теории упругости и параболического уравнения для параметра разрушения. Построенная модель может быть применена к изучению проблемы разрушения горных пород. В качестве примера рассмотрена одномерная задача деформации полуплоскости, нагруженной нормальным напряжением. Рассмотрена нестационарная постановка задачи, и получено качественное согласие с имеющимися наблюдениями экспериментальных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (грант 16-01-00729).

Литература

1. **Шемякин Е. И. и др.** *Эффект зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземных выработок.* ДАН СССР. 1986, Т. 289, №. 5, с. 1088-1094.
2. **Борисов А. А.** *Механика горных пород и массивов.* М., Недра. 1980, 360 с.

3. Cloete D. R., Collett P. A. G., Cooke N. G. W., Jager A. J., White A. J. A. *The nature of the fracture zone in gold mines as revealed by diamond core drilling*. Association of Mine Managers, Papers and discussions. 1972-1973.
4. Adams G. R., Jager A. J. *Petroscopic observation of rock fracturing ahead of stop faces in deep-level gold mines*. J. South African Inst. Mining and Metallurgy, 1980, vol. 80, No. 6, pp. 204-209.
5. Глушихин Ф. П., Шклярский М. Ф., Рева В. Н., Розенбаум М. А. *Новые закономерности разрушения горных пород вокруг выработок*. Шахтное строительство, 1986, No. 2. с. 11-14.
6. Кайдо И. И. *Исследование горного давления в подготовительных и нарезных выработках на гидрошахтах Кузбасса*. Тр. ВНИИгидроуголь. Совершенствование технологии отработки угольных пластов и оборудования при гидродобычи. Новокузнецк. 1984.
7. Гузев М. А., Мясников В. П. *Термомеханическая модель упруго-пластического материала с дефектами структуры*. МТТ. 1998. No. 4. с. 156-172.
8. Гузев М. А., Парошин А. А. *Неевклидовая модель зональной дезинтеграции горных пород вокруг земных выработок*. ПМТФ. 2000, No. 3, с. 181-195.
9. Гузев М. А., Ушаков А. А. *Критическое поведение параметра порядка в неевклидовой модели зональной дезинтеграции горных пород*. Физ. мезомех. - 2007. Т. 10, No. 4, с. 31-37.
10. Dorovsky V., Romensky E., Sinev A. *Spatially non-local model of inelastic deformations: applications for rock failure problem*. Geophysical Prospecting. - 2015. - Vol. 6, No. 5, pp. 1198-1212.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ТИПА БЮРГЕРСА ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ДВУХЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ

Имомназаров Х. Х.¹, Мамасолиев Б. Ж.²

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского
отделения РАН, Новосибирск, Россия, imom@omzg.sccc.ru*

² *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*

В последние десятилетия, математики становятся все более заинтересованы в проблемах, связанных с поведением решений систем уравнений в частных производных, с малым параметром при старших производных и с учетом кинетических параметров. Эти проблемы возникли из физических приложений, в основном из современной гидродинамики (сжимаемых многофазных жидкостей с малыми вязкостями). Аналогия уравнению Бюргерса возникает, например, при исследовании слабонелинейной одномерной акустической волны, движущейся с линейной скоростью звука. В этом случае нелинейные по скоростям члены в системе уравнений типа Бюргерса происходят из зависимости скоростей звука от амплитуды звуковой волны, а члены со второй производной и разности скоростей представляют затухание звуковых волн, связанное с диссипацией энергии. Другими словами, эти члены, обеспечивают непрерывность решений и представляют диссипативные процессы, связанные с производством энтропии. Эти члены, в свою очередь, обеспечивают неопрокидывание волн [1].

В работах [2,3], на основе законов сохранения, инвариантности уравнений относительно преобразований Галилея и условия термодинамической согласованности, построена нелинейная двухскоростная модель движения жидкости через деформируемую пористую среду. Двухскоростная двухжидкостная гидродинамическая теория с условием равновесия подсистем по давлению, была построена в работе [4]. Уравнения движения двухскоростной среды, когда давления являются функциями времени и диссипация энергии происходит за счет вязкости подсистем, а также межфазного трения, в изотермическом случае имеют вид [4, 5]

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \tilde{b}(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \tilde{\nu} \Delta \mathbf{v} + b(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \quad (2)$$

где \mathbf{u} и \mathbf{v} — скорости подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями (вязкостями) ρ (ν) и $\tilde{\rho}$ ($\tilde{\nu}$), $\bar{\rho} = \tilde{\rho} + \rho$ — общая плотность континуум, $\tilde{b} = \frac{\tilde{\rho}b}{\rho}$, b — коэффициент трения, который является аналогом коэффициента Дарси для пористых сред, t — время, \mathbf{x} — пространственная переменная, ∇ — оператор Гамильтона ("набла").

В данной работе получена формула для решения задачи Коши для одномерной си-

стемы уравнений типа Бюргера (1), (2) в случае, когда возрастание энтропии происходит за счет вязкостей подсистем и трения. Показано, что при исчезновении коэффициента трения b (в отсутствии диссипации энергии, обусловленной коэффициентом трения) решение задачи Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргера переходит к известному решению задачи Коши для уравнения Бюргера [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (грант 16-01-00729).

Литература

1. Куликовский А. Г., Свешников Е. И., Чугайнов А. П. *Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений*. Москва 2010, с. 122.
2. Доровский В. Н. *Континуальная теория фильтрации*. Геология и геофизика, 1989. No.7. с. 39-45.
3. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В. *Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями*. ПМТФ, 1992. No.3. с. 94-105.
4. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В. *Теория частичного плавления*. Геология и геофизика, 1989. No.9. с. 56-64.
5. Перепечко Ю. В., Сорокин К. Э., Имомназаров Х.Х. *Влияние акустических колебаний на конвекцию в сжимаемой двухжидкостной среде*. Труды XVII Международная конференция "Современные проблемы механики сплошной среды Ростова-на-Дону, 2014, с. 166-169.
6. Hopf E. *The partial differential equation $u_t + u u_x = \mu u_{xx}$* . Commun Pure and Appl. Math., 1950, V. 3. No. 3, с. 201-230.

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ДВУХЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ

Имомназаров Х. Х.¹, Мамасолиев Б. Ж.²

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского
отделения РАН, Новосибирск, Россия, imom@omzg.sccc.ru*

² *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*

В классической механике сплошной среды, состоящей только из единственной компоненты, в принципе нельзя моделировать процессы фильтрации, то есть движение насыщающих жидкостей, относительно скелета, образующего пористое твердое тело, или процессы седиментации (осаждения) и флотации (всплывания), то есть движение твердых частиц во вмещающей жидкости. Причина заключается в том, что в этих и многих других процессах твердые и жидкие компоненты движутся по-разному. Это приводит к необходимости рассматривать механику и термодинамику гетерогенных сред.

Уравнения Навье-Стокса полученное А. Навье (1822) на основе молекулярно-кинетического представления о движении однофазной жидкости. В работе Дж.Г. Стокса (1845) понятие вязкой (сжимаемой/несжимаемой) жидкости было сформулировано с помощью постулатов, которые отражают естественные свойства симметрии пространства-времени и движущейся в нем жидкости. Поэтому не удивительно, что уравнения Навье-Стокса обладают богатыми групповыми свойствами [1]. Эти свойства имеют различные проявления, но наиболее важное из них - возможность построения точных решений указанной системы уравнений.

Известно, что между появлением уравнений Навье-Стокса и публикацией первых результатов о разрешимости начально-краевых задач для этих уравнений прошло более ста лет. Еще позже появились методы и средства численного решения этих задач. Поэтому на начальном этапе развития теории роль точных решений уравнений Навье-Стокса была особенно велика. Точные решения незаменимы при тестировании численных методов, анализе сингулярностей в решениях дифференциальных уравнений в частных производных. Они имеют и прикладное значение – достаточно вспомнить формулу Пуазейля, вискозиметр Куэтта или теорию дискового электрода Левича.

В данной работе получена система уравнений типа Навье-Стокса для двухфазных несжимаемых сред в случае постоянства насыщенности фаз [2, 3]. Получена явная формула для одного класса частных решений системы типа Навье-Стокса в плоском случае. Показано, что решения исходной системы в плоском случае удовлетворяют нелинейному интегродифференциальному уравнению теплопроводности.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (грант 16-01-00729).

Литература

1. Пухначев В. В. *Симметрия в уравнениях Навье-Стокса*. Успехи механики, 2006. No.1. с. 6-76.
2. Перепечко Ю. В., Сорокин К. Э., Имомназаров Х. Х. *Влияние акустических колебаний на конвекцию в сжимаемой двухжидкостной среде*. Труды XVII Международная конференция "Современные проблемы механики сплошной среды Ростова-на-Дону, 2014, с. 166-169.
3. Жабборов Н. М., Имомназаров Х. Х. *Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред*. Ташкент, , Изд-во НУУз им. МирзоУлугбека, 2012. с. 212.

ОБРАТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОРОУПРУГОСТИ

Имомназаров Х. Х.¹, Туйчиева С. Т.²

¹ *Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия, imom@omzg.sscs.ru*

² *Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Ташкент, Узбекистан*

В [1] построена нелинейная математическая модель движения жидкости через деформируемую пористую среду. Показана гиперболичность линеаризованной относительно произвольного фона системы в обратимом гидродинамическом приближении. В этой модели существуют четыре типа звуковых колебаний: два поперечных (в изотропной среде их свойства совпадают) со скоростью c_t и два продольных со скоростями c_{l_1} , c_{l_2} . Теоретическому исследованию обратных задач для динамической системы уравнений пороупругости посвящены работы [2-6].

Пусть полупространство $R_+^3 = \{\mathbf{x} : (x_1, x_2) \in R^2, x_3 > 0\}$ заполнено изотропной пористой средой.

Задача А. Требуется по режиму колебаний свободной поверхности

$$\mathbf{u} |_{x_3=0} = \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}'), \quad t > 0, \quad \mathbf{x}' = (x_1, x_2) \in R^2 \quad (1)$$

определить вектор функцию $\mathbf{f}(x)$ в системе уравнений пороупругости

$$L_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \partial_t^2 \mathbf{u} - c_t^2 \Delta \mathbf{u} + (c_t^2 - a_1) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + a_2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} = g(t) \cdot \mathbf{f}(x), \quad (2)$$

$$L_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \partial_t^2 \mathbf{v} + a_3 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - a_4 \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} = g(t) \cdot \mathbf{f}(x)$$

с начальными и граничными условиями

$$\mathbf{u} |_{t < 0} = \mathbf{v} |_{t < 0} \equiv 0 \quad (3)$$

$$\bar{h}_{13} = \bar{h}_{23} = 0, \quad \bar{h}_{33} + \bar{P} = 0, \quad \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} \bar{P} = 0, \quad x_3 = 0, \quad (4)$$

$$\bar{P} = (K - \rho_0 \rho_{0,s} \alpha) \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho_0 \rho_{0,l} \alpha \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \bar{h}_{k3} = -\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_k} \right), \quad k = 1, 2,$$

$$\bar{h}_{33} = -2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \left(\lambda - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} K \right) \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} K \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad K = \lambda + \frac{2}{3} \mu.$$

Здесь функция $g(t)$ известна, $\mathbf{u}(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x, z), u_3(t, x))$ и $\mathbf{v}(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x), v_3(t, x))$ – скорости движений упругой пористой среды и жидкости, заполняющей пористую среду соответственно, $\rho_{0,s}$ и $\rho_{0,l}$ – парциальные плотности пористого тела и жидкости соответственно, λ, μ – параметры Ламе, $\rho_0^3 \alpha_3$ – второй модуль всестороннего сжатия, $\Delta, \nabla, \nabla \cdot$ и $\nabla \times$ – операторы Лапласа, градиента, дивергенции и ротора по $x = (x_1, x_2, x_3)$ соответственно, $\alpha = \rho_0 \alpha_3 + K/\rho_0^2$, $\rho = \rho_{0,s} + \rho_{0,l}$, взаимно-однозначная связь между параметрами λ, μ, α_3 и скоростями c_t, c_{l_1}, c_{l_2} установлены в [18-20] и даются формулами

$$a_1 = \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} (c_{l_1}^2 + c_{l_2}^2) + \frac{4}{3} \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} c_t^2 + \frac{\rho_{0,s} - \rho_{0,l}}{\rho_0} \tilde{z},$$

$$a_2 = \frac{\rho_{0,l}}{\rho_0} \left(c_{l_1}^2 + c_{l_2}^2 - 2\tilde{z} - \frac{4}{3} c_t^2 \right), \quad a_3 = \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} \left(c_{l_1}^2 + c_{l_2}^2 - 2\tilde{z} - \frac{4}{3} c_t^2 \right),$$

$$a_4 = \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} \left(c_{l_1}^2 + c_{l_2}^2 - \frac{4}{3} c_t^2 \right) - \frac{\rho_{0,s} - \rho_{0,l}}{\rho_0} \tilde{z},$$

$$\tilde{z} = \frac{1}{2} \left(c_{l_1}^2 + c_{l_2}^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0} c_t^2 \right) + \sqrt{\frac{1}{4} (c_{l_1}^2 + c_{l_2}^2)^2 - \frac{8}{3} \frac{\rho_{0,l} \rho_{0,s}}{\rho_0^2} c_t^4}.$$

В данной работе используя метод работы [7], решена в явном виде задача определения правой части (распределенного источника) из динамической системы уравнений порупругости по следу решения на свободной поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (грант 16-01-00729).

Литература

1. Блохин А. М., Доровский В. Н. *Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума*. Новосибирск, 1994, 183 с.
2. Имомназаров Х. Х. *Единственность определения источника в задаче Коши для*

- системы уравнений континуальной теории фильтрации. Доклады РАН. 1998, Т.360, No.1, с.111-113.
3. **Imomnazarov Kh. Kh.** *Uniqueness of Determination of a Source in the Cauchy Problem for the System of Equations of Continual Filtration Theory.* Appl. Math. Lett. 1998, v. 11, No.2, 75-79 p.
 4. **Imomnazarov Kh. Kh.** *Estimates of conditional stability of some combined inverse problems for Maxwell's equations and equations of porous media.* Comp. Appl. Math, 2001, Vol. 20, 20-34 pp.
 5. **Имомназаров Х. Х., Холмуродов А. Э.** *Прямые и обратные динамические задачи для уравнения SH волн в пористой среде.* Вестн. НУУЗ. Сер. Механика и математика, 2006, е 2, с.86-91.
 6. **Imomnazarov Kh. Kh., Kholmurodov A. E.** *Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media.* Math. and Computer Modelling, 2007, Vol. 45, е 3-4, 270-280 pp.
 7. **Бухгейм А. Л., Кардаков В. Б.** *Решение обратной задачи для уравнения упругих волн методом сферических средних.* Сиб. мат. журн., 1978, т. 19, No 4, с.749-758.

ГЕОМЕТРИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СОХРАНЯЮЩИХ ПЛОЩАДЬ ИЛИ ОБЪЕМ

Исмоилов Ш., Тиллаев Д., Юсупова З.

НУУЗ, Ташкент, магистранты.

В этой работе мы рассматриваем аффинное преобразование, исключив тождественное и зеркальное отображение, которые можно рассмотреть как частный случай. Под геометрией понимаем инвариант группы. Известно, что Евклидовы пространства R^n , являются инвариантом группы аффинных преобразований:

$$X' = AX + B, \quad (1)$$

где A — симметричная матрица, элементы которой удовлетворяет условию ортогональности и $\text{Det}A = 1$, (2) а B — вектор переноса.

Изучаем подгруппы преобразований (1), когда матрица A — не симметрична, и ее элементы не удовлетворяют условию ортогональности. Считается, что условие (2) выполнено.

Легко доказывать, при выполнении условия (2) объем n -мерного параллелепипеда сохраняется [Коган]. Оказывается, при выполнении выше указанных преобразований посредством (1) порождаются различные неевклидовы геометрии. Они зависят от размерности рассматриваемого аффинного пространства, также от нарушений симметрии на матрице. Сначала изучим двумерные и трехмерные случаи, и по индукции перейдем на n -мерный вариант.

Пусть A_2 — двумерная аффинная плоскость, Oxy — система аффинных координат на плоскости. На оси отметим точки $(0, 1), (0, -1)$. Пусть $A(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Через S обозначим площадь треугольника. При данном выборе $S = x$. Не трудно доказать, что преобразование (1), с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

сохраняет площадь S .

Определение 1. Нормой вектора \overrightarrow{OA} называется число, равное S -площади треугольника.

Следовательно: $|\overrightarrow{OA}| = S = x$. Когда вектор коллинеарен оси, за норму принимаем обычную за норму вектора, то есть $|\overrightarrow{OA}| = y$

Определение 2. Расстояние между двумя точками $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ считаем равной норму вектора \sqrt{MN} .

Тогда

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = |x_2 - x_1| \quad (3)$$

Если \overrightarrow{MN} коллинеарен оси, тогда имеем

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = |y_2 - y_1| \quad (4).$$

Метрика определенная формулами (3),(4) дает вырожденную метрику галилеевой плоскости R_2^1 [1]. Следовательно, соответствующая геометрия является галилеевой геометрией.

Теперь рассмотрим трехмерный случай. Точки $(0, 0, 1)$ и $(0, 0, -1)$ выберем на оси OZ аффинной системы координат $OXYZ$. Координатную плоскость OXY - считаем евклидовой плоскостью.

Тогда площадь треугольника $S = \frac{1}{2}BC_{OXY}OA$, где OXY - длина проекции вектора \overrightarrow{OA} на плоскость XY . Следовательно,

$$S = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Значит норма вектора \rightarrow

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Когда вектор OA коллинеарен оси OZ ,

$$|\overrightarrow{OA}| = z$$

Расстояние между точками (x_1, y_1, z_1) и $N(x_2, y_2, z_2)$ - определим как норму вектора \overrightarrow{MN} . Тогда получим вырожденную метрику

$$d_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} d_2 = |z_2 - z_1|.$$

Эта метрика определяет метрику изотропного пространства R_3^2 [1]. Матрица сохраняющая норму вектора имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Преобразования (1) с матрицей (5) дает движению изотропного пространства R_{31}^2 . Оно состоит из вращения вокруг OZ , сложение и параллельного переноса. Теперь в трехмерном случае рассмотрим преобразованию сохраняющий объем. Пусть в \mathbb{R}^3 $\{O, X, Y, Z\}$ система аффинных координат.

Плоскость $\{O, Y, Z\}$ считаем Евклидовой плоскостью и рассмотрим область D содержащей начало координат и центрально симметричной относительно начала координат. В частности это может быть окружностью. Площадь области D равна 3 . Точка $A \in X, Y, Z$ произвольная точек пространства \mathbb{R}^3 . Точку отрезками соединяем точками ∂D области D . Получим некоторый конус. Обозначим через V объем конуса.

Норму вектора \overrightarrow{OA} считаем равной объему конуса. Когда точка A принадлежит плоскости O, Y, Z , объем конуса равен нулю, а норму вектора \overrightarrow{OA} считаем равной обычной евклидовой норму. При данном выборе систему координат норма вектора $A(x, y, z)$, $\overrightarrow{OA} = x$ Когда $x = 0$, $\overrightarrow{OA} = \sqrt{y^2 + z^2}$.

Используя введенную норму вычислим расстоянию между точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) . Имеем $\overrightarrow{OA} = |x_2 - x_1|$ когда $z_2 - z_1 = 0$ $\overrightarrow{OA} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Это вырожденная метрика галилеева пространства R_3^1 [2].

Аффинные преобразование сохраняющая введенную норму, имеет вид матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

По аналогии эти определения можно объединить для n -мерных аффинных пространств. Когда норму вектора считаем равной объему n -мерного конуса основание которого на $(n-1)$ -мерной плоскости и $(n-1)$ -мерный объем которого равен n , получим геометрию n -мерного галилеева пространства R_n^1 .

Геометрию полуевклидова пространства R_n^m можно рассматривать как инвариант аффинного преобразования (1) сохраняющий m -мерный объем в n -мерном простран-

стве. Тогда матрица преобразования имеет вид: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots a_{1m} & c_{1,m+1} & c_{1n} \\ a_{m1} & \dots a_{mm} & c_{n,m+1} & c_{m+1,n} \\ 0 & \dots 0 & b_{m+1,m+1} & b_{m+1,n} \\ 0 & \dots 0 & b_{n,m+1} & b_{nn} \end{pmatrix}$

Пространство R_n^m имеет вырожденную метрику

$$ds_1^2 = dx_1^2 + \dots + dx_m^2,$$

когда $ds_1 = 0$, то

$$ds_2^2 = dx(m+1)^2 + \dots + dx_n^2.$$

Литература

1. Розенфельд Б. А. *Неевклидовы пространства*. М. НАУКА, 1969.
2. Артыкбаев А. *Восстановление выпуклых поверхностей по внешней кривизне в галилеевом пространстве*. Математический сборник, Том 119(161), №12(10), 1982, 204-224.

КРИТЕРИЙ ВЫЧИСЛИМОСТИ ПОДКОЛЬЦА ПОЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Касымов Н. Х.¹, Ибрагимов Ф. Н.²

¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, nadim59@mail.ru

²Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, farkh-i@yandex.com

С неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в работах [1–4]. Под словом кольцо будем понимать кольцо с единицей.

Напомним, что всюду определенная функция из множества натуральных чисел ω в ω называется вычислимой, если существует вычисляющий ее алгоритм. Подмножество $\alpha \subseteq \omega$ называется вычислимым (перечислимым, соответственно коперечислимым), если вычислима его характеристическая функция (α , соответственно $\omega \setminus \alpha$, – область значений некоторой вычислимой функции). Эти определения естественным образом переносятся на многоместные функции и отношения.

Фундаментальные алгебраические понятия поля и его обобщения – области целостности, являются классическими объектами исследования в математической логике, которая, в частности, занимается описанием алгоритмических свойств колец, заданных теми или иными представлениями ([1]). Важнейшими среди алгоритмических представлений этих объектов являются вычисляемые, называвшиеся прежде конструктивными ([2, 3]), т.е. такие, которые изоморфны кольцам, носителями которых являются вычисляемые (алгоритмически разрешимые) подмножества множества натуральных чисел, а операции сложения и умножения представлены подходящими вычислимыми операциями.

Более точно, если $\langle R; +, \times \rangle$ – произвольное не более чем счетное кольцо и φ – отображение из ω на R , для которого существуют такие вычисляемые бинарные операции \oplus, \otimes (представляющие соответствующие операции кольца на номерах/кодах его элементов в представлении φ), что $\forall x, y \in \omega [\varphi x + \varphi y = \varphi(x \oplus y)]$ и $\forall x, y \in \omega [\varphi x \times \varphi y = \varphi(x \otimes y)]$ (т.е. φ является эффективным гомоморфизмом), то φ называется нумерацией (алгоритмическим представлением) кольца R . Хорошо известно, что любая не более чем счетная универсальная алгебра эффективной сигнатуры (в т.ч. кольцо) имеет алгоритмическое представление (Ю.Л. Ершов, [2], гл.6, §1, Теорема 1).

Ядром представления φ кольца R называется эквивалентность $\{ \langle x, y \rangle \mid \varphi x = \varphi y \}$.

Определение 1. Кольцо R называется вычислимо (позитивно, негативно) представимым, если существует его представление с вычислимым (перечислимым, коперечислимым) ядром.

Нетрудно заметить, что вычислимость представления кольца равносильна одновременной позитивности и негативности этого представления. Наиболее изученными объектами в теории абстрактной вычислимости являются поля. Т.к. любое поле является про-

стой алгеброй (т.е. в нем отсутствуют собственные идеалы), то всякое позитивное представление поля является вычислимым. С другой стороны, всякое бесконечное вычислимо представимое поле обладает негативными невычислимыми представлениями ([5]), поэтому таковы же и бесконечные области целостности. Простейшим бесконечным полем характеристики нуль является поле рациональных чисел $\langle Q; +, \times \rangle$, не имеющее не только собственных идеалов, но и собственных подполей. В связи с вышесказанным возникает естественный вопрос о вычислимости позитивных подколец поля рациональных чисел $\langle Q; +, \times \rangle$ (автоматически являющихся областями целостности) в его естественном представлении. При этом, в качестве вычислимого представления эффективного универсума поля Q можно взять сами рациональные числа, т.к. очевидно, что всякое интуитивно регулярное отображение из ω на Q поддерживается на номерах вычислимыми функциями.

Пусть $\langle \omega; +, \times \rangle$ – вычислимое представление поля рациональных чисел Q , π – произвольное подмножество множества простых чисел $\Pi \subseteq \omega$, $\mathbf{n} = 1 + \dots + 1$ (n раз) и $R(\pi)$ – подкольцо поля Q , порожденное множеством рациональных дробей $\{1/\mathbf{n} | \mathbf{n} \in \pi\}$. Ясно, что всякая подобласть целостности R поля Q имеет вид $R(\pi)$ для подходящего $\pi \subseteq \Pi$, которое будем называть базисом кольца $R(\pi)$.

Теорема 1. *Для произвольного подкольца R поля Q следующие условия эквивалентны:*

- (1) *всякое позитивное представление кольца R является вычислимым;*
- (2) *базис π кольца R перечислим в $Q = \langle \omega; +, \times \rangle$;*
- (3) *R – вычислимое подкольцо поля $Q = \langle \omega; +, \times \rangle$.*

Следствие 1. *Класс негативных представлений любого подкольца поля рациональных чисел существенно шире класса его позитивных представлений.*

Представление кольца назовем локально вычислимым, если хотя бы один смежный класс его ядерной эквивалентности вычислим.

Теорема 2. *Всякое локально вычислимое позитивное представление области целостности является вычислимым.*

Замечание 1. Отметим, что в отличие от полей, все позитивные представления которых вычислимы, позитивные области целостности не обязаны быть вычислимыми (не опубликовано).

Литература

1. **Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.** *Конструктивные модели.* Новосибирск, Научная книга, 1999, 360 с.
2. **Ершов Ю. Л.** *Проблемы разрешимости и конструктивные модели.* М., Наука, 1980, 416 с.

3. Мальцев А. И. *Конструктивные алгебры, I*. Успехи мат. наук, 1961, 16, No. 3, с.3-60.
4. Касымов Н. Х. *Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры*. Успехи мат. наук, 1996, 51, No. 3, с.145-176.
5. Khoussainov B. M., Slaman T. A., Semukhin P. M. \prod_1^0 -Presentations of Algebras. Archive for Mathematical Logic, 2006, 45, No. 6, с.769-781.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕГАТИВНО ПРЕДСТАВИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Касымов Н. Х.¹, Ходжамуратова И. А.²

¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, nadim59@mail.ru

²Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
indiraazatovna@mail.ru

Со всеми неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в работах [1–4, 6].

Через ω обозначается множество натуральных чисел.

Как обычно, вычислимой функцией из ω^n ($n \geq 1$) в ω называется всюду определенная функция, для которой существует вычисляющий ее алгоритм. Отношение на ω^n ($n \geq 1$) называется вычислимым (перечислимым, негативным), если вычислима его характеристическая функция (существует алгоритм порождения элементов данного отношения, существует алгоритм порождения элементов дополнения данного отношения).

Следуя академикам С.С. Гончарову, Ю.Л. Ершову и А.И. Мальцеву ([1, 2, 3]) приведем ряд основных определений. Если M – произвольная не более чем счетная система (т.е. множество вместе с фиксированным на нем набором операций и отношений) и μ – отображение множества натуральных чисел ω на M , то пара (M, μ) называется нумерованной системой, если все операции, действующие на M , представлены соответствующими вычислимыми функциями в нумерации μ , т.е. для любой n -местной операции F , названной в сигнатуре M и действующей на основном множестве этой системы, найдется такая вычислимая (μ -представляющая) функция f той же местности, что $\forall \bar{x} \in \omega^n (F\mu\bar{x} = \mu f\bar{x})$. Если даны две нумерованные системы (M, μ) и (N, ν) , то гомоморфизм φ из M в N называется морфизмом, если он эффективен на номерах, т.е. существует такая вычислимая функция g , что $\varphi\mu = \nu g$. Если данный морфизм φ является изоморфизмом из (M, μ) на (N, ν) , то будем говорить, что (M, μ) эффективно сводимо к (N, ν) . Заметим, что хотя обратное отображение к изоморфизму есть также изоморфизм, он не обязан быть морфизмом, т.к. обратное отображение, вообще говоря, может и не поддерживаться вычислимой

на номерах функцией. Нумерационной эквивалентностью нумерованной системы (M, μ) называется ядро отображения μ , т.е. $\{ \langle x, y \rangle \mid \mu x = \mu y \}$.

Нумерованная система, в которой все основные отношения (включая равенство) вычислимы на номерах (т.е. существует семейство алгоритмов, позволяющих распознавать проблему принадлежности любого кортежа номеров соответствующему отношению) называется вычислимой. Говорят, что модель вычислимо представима (имеет вычислимую копию), если она имеет вычислимую нумерацию. Аналогично, если система имеет негативную (с коперечислимой проблемой распознавания принадлежности основным отношениям) или позитивную (с перечислимым распознаванием) нумерацию, то она называется негативно (соответственно, позитивно) представимой.

Эквивалентность η на множестве натуральных чисел ω называется негативной (позитивной), если множество $\{ \langle x, y \rangle \mid x \neq y \pmod{\eta} \}$ является перечислимым (коперечислимым).

Линейный порядок $\langle L; \leq \rangle$ называется негативно (позитивно) представимым над произвольной эквивалентностью η , если существует такая его нумерация ν с ядром совпадающим с η , что множество $\{ \langle x, y \rangle \mid \nu x \leq \nu y \}$ коперечислимо (перечислимо).

Предложение 1. *Для всякого негативного линейного порядка существует эффективно сводимый к нему вычислимый линейный порядок.*

Замечание 1. Для позитивных линейных порядков Предложение 1 не имеет места.

Обозначим через $\eta(\alpha)$ эквивалентность $\{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \alpha \} \cup id \omega$.

В [5] доказана следующая теорема.

Пусть α – коперечислимое, но невычислимое множество и $\langle L; \leq \rangle$ – произвольный линейный порядок. Тогда следующие условия равносильны:

- (1) $\langle L; \leq \rangle$ негативно представим над $\eta(\alpha)$;
- (2) $\langle L; \leq \rangle$ – вычислимо представимый линейный порядок, имеющий хотя бы один предельный элемент.

В настоящей заметке анонсируется следующее обобщение этой теоремы.

Теорема 1. *Пусть η – произвольная эквивалентность на ω , содержащая ровно n нетривиальных η -классов, каждый из которых является коперечислимым невычислимым множеством и $\langle L; \leq \rangle$ – произвольный линейный порядок. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (1) $\langle L; \leq \rangle$ негативно представим над η ;
- (2) $\langle L; \leq \rangle$ вычислимо представимый линейный порядок, имеющий хотя бы n предельных точек.

Замечание 2. Несмотря на схожесть формулировок вышеупомянутой теоремы из [5] и Теоремы 1, являющейся ее обобщением, доказательство последней потребовало при-

влечения ряда новых нетривиальных понятий.

Теорема 1 имеет ряд важных следствий. В частности, из нее вытекает изоморфная вложимость порядкового типа $1 + \omega^*$ (где ω^* – порядковый тип упорядочения отрицательных целых чисел) в структуру степеней негативной представимости линейных порядков.

Литература

1. **Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.** *Конструктивные модели.* Новосибирск, Научная книга, 1999, 360 с.
2. **Ершов Ю. Л.** *Теория нумераций.* М., Наука, 1977, 416.
3. **Мальцев А. И.** *Конструктивные алгебры, I.* Успехи мат. наук, 1961, 16, No. 3, 3-60.
4. **Касымов Н. Х.** *Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры.* Успехи мат. наук, 1996, 51, No. 3, 145-176.
5. **Касымов Н. Х., Морозов А. С.** *Об определенности линейных порядков над негативными эквивалентностями.* Алгебра и логика, 2016, 55, No. 1, 37-57.
6. **Роджерс Х.** *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.* М., Мир, 1972, 624 с.

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УЗБЕКСКОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ЛИНГВИСТИКИ

Кобилов С. С.¹, Раббимов И. М.²

¹ *Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,*
kobsam@yandex.ru

² *Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,*
ilyos.rabbimov@mail.ru

Одной из актуальных и интересных задач компьютерной лингвистики является алгоритмизация, т.е. создание алгоритмов и разработка программного обеспечения для разнообразных задач лингвистики. Актуальность решения этих задач усиливается тем, что многие проблемы алгоритмизации узбекской компьютерной лингвистики пока не решены. Поэтому в данной работе обсуждаются вопросы проектирования программного комплекса для решения некоторых интересных задач этой области. Нами предлагается и обосновывается создание программной среды решения таких задач. Структурно и функционально такая среда - это аналог автоматизированного рабочего места (АРМ - Work station)

лингвиста, т. е. совокупность аппаратного (hardware), программного (software) и лингвистического (lingware) обеспечения. Здесь под lingware подразумевается разнообразные лингвистические компьютерные ресурсы, касающиеся родного (узбекского) и, возможно, изучаемых иностранных языков. Среда - это программный комплекс с набором компонент. Компоненты: каркас - основное рабочее окно, база данных, подсистемы и программные модули[1].

Главное меню (Файл, Подсистемы, База данных, Модули). Главное меню (основное рабочее окно) содержит оглавление дополнительных меню, каждый из которых может иметь свои опции (под опции). Например, меню опции Файл реализовывают общеизвестные и специализированные функции над файлами. **Подсистемы** (Лексикография, Анализ текста, Машинный перевод, ...). Подсистемы - это иерархия прикладных задач (разделов) компьютерной лингвистики. Например, **Словари** (Алфавитный, Частотный, Обратный, ...). **База данных** сохранит декларативные средства компьютерной лингвистики, такие как справочники, словари, энциклопедии, правила и формальное описание грамматики языка, смысловые единицы языка и т. п. **Модули** - процедурные средства компьютерной лингвистики. Эти средства реализовываются на базе современных технологий программирования в виде набора алгоритмов и подпрограмм, сопрограмм и программных продуктов. Например, Модули сортировки данных; Модули транслитерации текста; Модули перевода части слова с одной строки на другую; Программы статистического анализа литературного текста; Программы проверки орфографии (Spellchecker); Программы синтаксического и семантического контроля текстов; Программы, выделяющие структуры знаний из текстов ЕЯ и другие.

Литература

1. **Кобилов С., Раббимов И.** *Проектирование специализированного текстового редактора.* Тезисы докладов Международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - Аль-Хорезми 2016" Ташкент: НУУ, 2016 г, 17 с.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА

Кулдошев Х. М.

Узбекский государственный университет мировых языков, Ташкент, Узбекистан

Для того чтобы найти приближенное представление функции φ с помощью элементов конкретного конечномерного пространства возможно использовании значения этой функции на каком то конечном множестве точек $x_\beta, \beta = 0, 1, \dots, N$. Соответствующая задача называется задачей интерполирования и точки x_β называются узлами интерполяции.

Существуют полиномиальная и сплайн интерполяции. В настоящее время теория сплайн интерполяции быстро развивающаяся.

В настоящей работе также исследуется задача построения интерполяционных формул. В связи с этим здесь рассмотрим Гильбертово пространство

$$K_2(P_3) = \{\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi'' - \text{абс. непрер. } \varphi''' \in L_2(0, 1)\},$$

снабженный нормой

$$\|\varphi\|_{K_2(P_2)} = \left\{ \int_0^1 \left(P_3 \left(\frac{d}{dx} \right) \varphi \right)^2 dx \right\}^{1/2} \quad (1)$$

где $P_3 \left(\frac{d}{dx} \right) = \frac{d^3}{dx^3} - 2 \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}$ и $\int_0^1 \left(P_3 \left(\frac{d}{dx} \right) \varphi \right)^2 dx < \infty$. Рассмотрим следующую интерполяционную задачу:

Задача 1. Найти функцию $S_3(x) \in K_2(P_3)$, которая дает минимум норме (1) и удовлетворяющее следующее интерполяционные условия

$$S_3(x_\beta) = \varphi(x_\beta), \quad \beta=0,1,\dots,N \quad (2)$$

для любой $\varphi \in K_2(P_3)$, где $x_\beta \in [0, 1]$ узлы интерполяции.

Аналитическое представление интерполяционного сплайна $S_3(x)$

$$S_3(x) = \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma G_3(x - x_\gamma) + d_1 e^{-x} + d_2 x e^{-x} + \lambda_0 \quad (3)$$

где $C_\gamma, \gamma = 0, 1, 2, \dots, N, d_1, d_2, \lambda_0$ действительные числа,

$$G_3(x) = \frac{\text{sgn}(x)}{2} \left(x - \frac{1}{4} (e^x(x-3) + e^{-x}(x+3)) \right) \quad (4)$$

фундаментальное решение оператора $\frac{d^6}{dx^6} - 2 \frac{d^4}{dx^4} + \frac{d^2}{dx^2}$. Решение $S_3(x)$ вида (3) задачи 1 существует, единственно когда $N = 2, 3, \dots$ и коэффициенты $C_\gamma, \gamma = 0, 1, 2, \dots, N, d_1, d_2$

функции $S_3(x)$ определяются следующей системой $N + 3$ линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma G_3(x_\beta - x_\gamma) + d_1 e^{-x_\beta} + d_2 x_\beta e^{-x_\beta} + \lambda_0 &= \varphi(x_\beta), \quad \beta=0,1, \dots, N, \\ \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma e^{-x_\gamma} &= 0, \\ \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma x_\gamma e^{-x_\gamma} &= 0, \\ \sum_{\gamma=0}^N C_\gamma &= 0, \end{aligned}$$

где $\varphi \in K_2(P_3)$.

Основной целью настоящей работы является решить задачу 1, т.е., решить последнюю систему для равно расположенных узлов $x_\beta = h\beta$, $\beta = 0, 1, \dots, N$, $h = 1/N$, $N = 1, 2, \dots$ и найти аналитические представления коэффициентов C_γ , $\gamma = 0, 1, 2, \dots, N$, d_1, d_2 и λ_0 функции $S_3(x)$.

АСИММЕТРИК АЛГОРИТМЛАРНИ АМАЛИЁТДА ҚЎЛЛАШ БИЛАН БОҒЛИҚ МУАММОЛАР ВА УЛАР ЕЧИМЛАРИ

Курьязов Д. М.

*ТАТУ қошидаги Радиоэлектрон тизимлар ва ахборот технологиялари маркази,
Тошкент, Ўзбекистон, kuryazovdm@mail.ru*

Бугунги кунда криптографик тизим қанчалик мураккаб ва ишончли алгоритмга асосланган бўлмасин, унинг амалий қўлланишида келиб чиқадиган муҳим масала, бу крипто-тотизим фойдаланувчиларга калитларни тақсимлаш масаласи ҳисобланади. Чунки ахборотлар тизимида махфий алоқани таъминловчи криптографик тизим фойдаланувчилари ўзаро алоқаси учун калит уларнинг бири орқали яратилган бўлиб, иккинчисига махфий ҳолда етказилиши лозим. Натижада калитни етказиш (узатиш) учун ҳам яна бошқа крипто-тотизимдан фойдаланиш керак. Мазкур масалани ечиш учун, классик ҳамда замонавий фан ва техника ютуқларига, хусусан, сонлар назарияси, олий алгебра, математик таҳлил ва аналитик геометрия фанлари ютуқларига асосланган ҳолда очикқалитли (асимметрик) крипто-тотизимлар яратиш йўналиши вужудга келган.

Асимметрик криптография усулларининг пайдо бўлиши эса криптографиянинг нафақат махсус хизматлар доирасида, балки бир қатор вазирлик ва идоралар ахборот тизимлари электрон хужжат алмашинувида кенг ишлатилишига имкон яратди. Электрон хужжат алмашинувининг муҳим ажралмас қисми эса электрон рақамли имзо бўлиб, дастав-

вал у турли электрон хужжат алмашинувида хужжатнинг юридик мақомини аниқлаб, электрон хужжатга қўйилган рақамли имзонинг муаллифлик ҳуқуқини кафолатлайди.

Мустақиллик йилларида республикада ахборот-коммуникация технологиялари ва хизматларини ривожлантиришга йўналтирилган бир қатор муҳим ҳуқуқий-меъёрий хужжатлар ҳамда қонунлар ишлаб чиқилди. Масалан, электрон рақамли имзодан фойдаланиш ва электрон хужжат алмашинувини ҳуқуқий асосларини яратиш учун «Электрон рақамли имзо тўғрисида», «Электрон хужжат алмашинуви тўғрисида», «Электрон тижорат тўғрисида» Ўзбекистон Республикаси қонунлари қабул қилинган. Ушбу қонунлар талабаларидан келиб чиқиб, симметрик шифрлаш, хэш-функция ва электрон рақамли имзо миллий стандарт алгоритмлари ишлаб чиқилди ҳамда улар ахборотни криптографик муҳофаза қилиш миллий қурилмалари криптомодулларида кенг фойдаланиб келинмоқда [4-6].

Таъкидлаш лозимки республикада миллий стандарт даражасида асимметрик алгоритм қабул қилинмаган. Шунинг учун янги замонавий асимметрик шифрлаш алгоритмлар яратиш йўналишида илмий-тадқиқот ишларини олиб бориш ахборот хавфсизлиги соҳасида фаолият олиб бораётган мутахассислар учун долзарб мавзулардан бири ҳисобланади[3].

Ҳозирда криптография соҳасида классик асимметрик алгоритмлар қаторига кирган ва кўпчилик ривожланган давлатларда, жумладан республикада ҳам симметрик шифрлаш алгоритми сеанс калитини алмашишда RSA асимметрик шифрлаш алгоритмидан кенг фойдаланилади. Ушбу алгоритм катта разрядли сонларни туб кўпайтувчиларга ажратиш масаласи мураккаблигига асосланган [1-2, 7-8].

Мақолада замонавий асимметрик шифрлаш алгоритмларини амалиётда қўллаш билан боғлиқ муаммолар, унинг ечимлари йўналишидаги хориж тажрибалари [1-3,8] таҳлил қилинган ва эллиптик эгри чизикасосида янги оптимал асимметрик шифрлаш алгоритми таклиф этилган.

Литература

1. **Bellare M., Rogaway P.** *Optimal Asymmetric Encryption – How to Encrypt with RSA.* Springer Berlin Heidelberg, 1995.-vol.950.-P.92-111.-ISBN 978-3-540-60176-0/-ISSN 0302-9743.-DOI:10.1007.BFb0053428.
2. **Eiichiro Fujisaki, Tatsuaki Okamoto, David Pointcheval, Jacques Stern** *RSA-OAEP is Secure under the RSA Assumption.* Springer Berlin Heidelberg, 2001.-vol.2139.-P.260-274.-ISBN 978-3-540-42456-7-ISSN 0302-9743.-DOI:10.1007/3-540-44647-8_16.
3. **Курьязов Д. М.** *Асимметричный алгоритм шифрование данных на эллиптической кривой.* Вестник ТУИТ №2, 2014г., стр. 56-62.

4. O'zDSt 1105:2009 «Ахборот технологияси. Ахборотнинг криптографик мухофазаси. Маълумотни шифрлаш алгоритми».
5. O'zDSt 1106:2009 «Ахборот теологияси. Ахборотнинг криптографик мухофазаси. Хэшлаш функцияси».
6. O'zDSt 1092:2009 «Ахборот технологияси. Ахборотнинг криптографик мухофазаси. Электрон рақамли имзо алгоритми».
7. Брюс Ш. *Прикладная криптография*. Протоколы, алгоритмы и исходные тексты на языке Си. – 2-е изд. – М. : Триумф, 2002.
8. Мао В. *Современная криптография*. Москва. 2005г.-763 стр.

РЕШЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АЛГОРИТМОМ ELIMLIN

Мамадова Х. Х.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, hmx1991@mail.ru

Существуют различные методы в криптоанализе симметричных шифров. Некоторые включают статистический анализ, а некоторые чисто детерминированы. Любое алгебраическое нападение состоит из двух различных этапов:

- Написание шифра как система многочленных уравнений низкого звания часто по $GF(2)$ или $GF(2^k)$, который выполним для любого шифра [1].

- Восстановление секретного ключа, решая такую большую систему многочленных уравнений.

Алгебраические нападения были успешны в ломке нескольких шифров потока (например: [2]) и несколько блочных шифров, таких как Keeloq [3] и ГОСТ, но они не так же успешны как статистические нападения. С другой стороны, они часто требуют данных низкого уровня сложности. А для статистических нападений дело обстоит не так.

В настоящее время, для случайной системы, в которой количество уравнений равно количеству неизвестных, там не существует техники быстрее, чем исчерпывающий ключевой поиск, который может решить такие системы. На другая рука, уравнения, полученные из симметричных шифров, оказывается сверхопределенный и редкий для большинства шифров. Так, их можно легче решить.

Традиционный метод для решения сверхопределенной многочленной системы уравнений определен различными базисными алгоритмами Грочбнер, такими как алгоритм

Бучберге F4 и F5 и XL. Самый критический недостаток базисного подхода Грочбнер - шаг устранения степени системных увеличений. На другом рука, они быстрее, чем другие методы для сверхопределенный плотных систем или когда уравнения по GF (q) где $q > 2$.

Мы изучаем алгоритм устранения ElimLin, который находится в пределах сферы компетенции Базисные алгоритмы Грочбнер, хотя это концептуально намного более просто и основано на соединении простой линейной алгебры и замены. ElimLin состоит из двух последовательных отличных этапов, а именно:

- Гауссовское Устранение: Все линейные уравнения в линейном промежутке начальных уравнений найденный. Они - перекресток между двумя векторными пространствами: векторное пространство заполнено всеми одночлены степени 1 и векторное пространство заполнены всеми уравнениями.

- Замена: Переменные многократно устранены в целой системе на основе линейных уравнений, пока нет никакого линейного оставленного уравнения. Следовательно, у остающейся системы есть меньше переменных.

Пример ElimLin

Предположим, что у нас есть следующая сверхопределенный система многомерных уравнений по GF (2) с 6 переменными x_1, \dots, x_6 и 7 уравнений,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_4x_6 + x_5x_6 \\ x_2x_6 + x_3x_6 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_3x_4 \\ x_1 + x_3 + x_4 \\ x_1x_3 + x_1x_4 + 1 \\ x_2x_3 + x_2x_5 + x_1x_6 \\ x_3x_6 + x_3 + 1 \end{array} \right.$$

Мы рассматриваем линейное уравнение $x_1 + x_3 + x_4$ для замены $x_3 = x_1 + x_4$, и мы получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} x_4x_6 + x_5x_6 \\ x_2x_6 + (x_1 + x_4)x_6 \Rightarrow x_2x_6 + x_1x_6 + x_4x_6 \\ x_2 + (x_1 + x_4) + x_5 + x_6 + (x_1 + x_4)x_4 \Rightarrow x_2 + x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_1x_4 + x_4x_4 \\ x_1 + (x_1 + x_4) + x_4 \Rightarrow 0 \\ x_1(x_1 + x_4) + x_1x_4 + 1 \Rightarrow x_1x_1 + 1 \\ x_2(x_1 + x_4) + x_2x_5 + x_1x_6 \Rightarrow x_1x_2 + x_4x_2 + x_2x_5 + x_1x_6 \\ (x_1 + x_4)x_6 + (x_1 + x_4) + 1 \Rightarrow x_1x_6 + x_4x_6 + x_1 + x_4 + 1 \end{array} \right.$$

С тех пор $x_1^2 = x_1$ мы получаем новое линейное уравнение $x_1 = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_4x_6 + x_5x_6 \\ x_2x_6 + x_1x_6 + x_4x_6 \Rightarrow x_2x_6 + x_6 + x_4x_6 \\ x_2 + x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_1x_4 + x_4x_4 \Rightarrow x_2 + 1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_4 + x_4x_4 \\ 0 \\ x_1x_1 + 1 \Rightarrow 0 \\ x_1x_2 + x_4x_2 + x_2x_5 + x_1x_6 \Rightarrow x_2 + x_4x_2 + x_2x_5 + x_6 \\ x_1x_6 + x_4x_6 + x_1 + x_4 + 1 \Rightarrow x_6 + x_4x_6 + 1 + x_4 + 1 \end{array} \right.$$

Это дает нам новое линейное уравнение $x_2 + 1 + x_4 + x_5 + x_6$. Мы предварительно формируем замену $x_2 = 1 + x_4 + x_5 + x_6$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_4x_6 + x_5x_6 \\ x_2x_6 + x_6 + x_4x_6 \Rightarrow x_5x_6 + x_6 \\ x_2 + 1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_4 + x_4x_4 \Rightarrow 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_2 + x_4x_2 + x_2x_5 + x_6 \Rightarrow 1 + x_4 + x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 \\ x_6 + x_4x_6 + x_4 \Rightarrow x_6 + x_4x_6 + x_4 \end{array} \right.$$

Мы вычисляем линейный промежуток этой системы, и мы получаем линейное уравнение $\text{Eq2} + \text{Eq6} + \text{Eq7} = (x_5x_6 + x_6) + (1 + x_4 + x_5 + x_4x_6 + x_5x_6) + (x_6 + x_4x_6 + x_4) = 1 + x_5$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_4x_6 + x_5x_6 \\ x_5x_6 + x_6 \Rightarrow 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 + x_4 + x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 \Rightarrow x_4 + x_4x_6 + x_6 \\ x_6 + x_4x_6 + x_4 \Rightarrow x_4 + x_4x_6 + x_6 \end{array} \right.$$

Мы вычисляем линейный промежуток этой системы, и получаем линейное уравнение $\text{Eq1} + \text{Eq2} + \text{Eq7} = (x_4x_6 + x_5x_6) + (x_5x_6 + x_6) + (x_4 + x_4x_6 + x_6) = x_4$. Это в конечном дает нам $x_4 = 0$ и впоследствии $x_6 = 0$. В нашем примере мы не использовали первое уравнение $x_4x_6 + x_5x_6$ до самого конца ElimLin. Без этого уравнения ElimLin неспособен найти решение. Однако решение может быть найдено XL алгоритмами, если бы мы вычисляем $x_6\text{Eq7} = x_4x_6 + x_4x_6x_6 + x_6x_6 = x_6$ и после замены, мы получили бы $x_4 = 0$.

Литература

1. Мерфи С., Робшоу М. *Essential Algebraic Structure within AES. In Advances in Cryptology - CRYPTO*. Springer-Verlag, 2002, том 2442, страницы 1-16.
2. Армнечт Ф., Арс Г. *Algebraic Attacks on Stream Ciphers with Grobner Bases. Grobner*

Bases, Coding, and Cryptography. 2009, страницы 329-348.

3. Индестидж С., Келлер Н., Данкелмен О., Бихэм Э., Пренил Б. *A Practical Attack on Keeloq*. In *EUROCRYPT*. 2008, том 4965, страницы 1-18.
4. Поли М., Воденей С., Динг Дж., Куртуа. Н. *Algebraic Cryptanalysis of Deterministic Symmetric Encryption Suisse*. 2015.

ГЕОМЕТРИЯ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ

Нарманов А. Я.¹, Сайтова С.²

¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, narmanov@yandex.ru

²Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Изучению геометрии множества достижимости и орбиты семейства гладких векторных полей посвящены исследования многих математиков в связи с ее важностью в приложениях, в теории оптимального управления, динамических системах, в геометрии и в теории слоений [1-9].

В качественной теории управления множество управляемости (или множество достижимости) системы управления на гладком многообразии в классе кусочно-постоянных управлений совпадает с отрицательной (положительной) орбитой семейства векторных полей, которое определяется системой управления однозначно. В случае симметричных систем множество управляемости (и также множество достижимости) совпадает с орбитой.

С другой стороны, любое семейство векторных полей определяет некоторую динамическую полисистему. Таким образом, изучение структуры множества управляемости тесно связано с изучением структуры орбиты семейства векторных полей. Хорошо известно, что множество управляемости является одним из основных объектов качественной теории оптимального управления.

При изучении качественных свойств системы управления на гладком многообразии, таких как вопросы об управляемости, возникает возможность применения дифференциально - геометрических методов. О дифференциально - геометрических методах в теории оптимального управления можно читать в работе [1].

Рассмотрим множество $D \subset V(M)$, которое может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Для точки $x \in M$ через $t \rightarrow X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X , проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \rightarrow X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x) \subset R$, которая в общем случае зависит от поля X , и от начальной точки x .

В дальнейшем, всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$. Если для всех точек $x \in M$ область определения $I(x)$ кривой $t \rightarrow X^t(x)$ совпадает с числовой осью, то векторное поле X называется полным векторным полем. В этом случае поток векторного поля порождает динамическую систему.

Определение 1. Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x , определяется как множество таких точек y из M , для которых существуют действительные числа t_1, t_2, \dots, t_k и векторные поля X_1, X_2, \dots, X_k из D (где k — произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(x))\dots)).$$

Определение 2. Точка

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(x))\dots)) \in L(x)$$

называется T — достижимой из точки $x \in M$, если $\sum_i t_i = T$.

Обозначим через $A_x(T)$ множество точек, которые T — достижимы из точки x .

Напомним, что подмногообразие $N \subset M$ называется погруженным в M , если каноническая инъекция $i : N \rightarrow M$ является дифференцируемым отображением максимального ранга.

Топология орбиты $L(x)$ (топология Суссмана) вводится как сильнейшая топология, для которой все отображения вида:

$$(t_1, t_2, \dots, t_k) \in R^k \rightarrow X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(x))\dots)),$$

являются непрерывными, где t_1, t_2, \dots, t_k — действительные числа, X_1, X_2, \dots, X_k — векторные поля из семейства D .

Собственная топология орбиты, как погруженного подмногообразия является более сильной, чем топология, индуцированная из M .

Например, для иррациональной обмотки тора для всех траекторий эти топологии различны.

Используя идею работы [13] Суссмана, где он доказал, что орбита является гладким многообразием, в работе [4] доказана следующая теорема о геометрии множества T — достижимых точек.

Теорема 1. Множество $A_x(T)$ для каждого $x \in M$ при любом T является погруженным подмногообразием орбиты $L(x)$ коразмерности единицы или нуля.

Еще одним существенным вкладом Г.Суссмanna в изучении геометрии множества достижимости является следующая теорема, которая доказана совместно N.Levitt [10].

Теорема 2. Пусть M - гладкое связное многообразие размерности n . Существует система D , состоящая из двух векторных полей такая, что $L^+(x) = M$ для каждой точки $x \in M$.

Используя теорему-2 в работе [4] доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть M - гладкое связное многообразие размерности $n \geq 2$. Существует система D , состоящая из трех векторных полей такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.

Для многообразий с ненулевой эйлеровой характеристикой получен следующий результат [4].

Теорема 4. Пусть M - гладкое компактное связное многообразие размерности $n \geq 2$, эйлерова характеристика которого отлична от нуля. Существует система D , состоящая из двух векторных полей такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.

Следующий пример показывает, что на компактном связном многообразии M с нулевой эйлеровой характеристикой также может существовать система D , состоящая из двух векторных полей такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.

Пусть трехмерная сфера $S^3 \subset R^4$ задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, где x, y, z, w - декартовы координаты в R^4 .

Рассмотрим систему на S^3 , состоящую из двух векторных полей:

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - w \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial w}, Y = -z \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}$$

Нетрудно проверить, что эти векторные поля являются полями Киллинга, т.е. локальные диффеоморфизмы $x \rightarrow X^t(x)$, $x \rightarrow Y^t(x)$ при каждом t являются изометриями сферы S^3 . Скобка Ли $[X, Y]$ векторных полей X, Y имеет следующий вид:

$$[X, Y] = -w \frac{\partial}{\partial x} - z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial w}.$$

Векторные поля $X, Y, [X, Y]$ принадлежат подалгебре Ли $V(D)$, которая является минимальной подалгеброй Ли алгебры Ли $V(M)$, содержащей множество D .

В точке $p(1, 0, 0, 0) \in S^3$ векторы $X(p), Y(p), [X, Y](p)$ линейно независимы т.е. подпространство $V_p(D) = \{X(p) : X \in V(D)\}$ трехмерно. Поэтому орбита $L(p)$ является трехмерной. В силу того, что X, Y являются векторными полями Киллинга, орбита $L(p)$ является замкнутым подмножеством R^4 (следовательно, в S^3) [?]. С другой стороны, как вытекает из доказательства теоремы-1, в силу максимальности размерности, орбита $L(p)$ является открытым подмножеством S^3 . Следовательно, орбита совпадает с S^3 .

Теперь рассмотрим множества $A_q(0)$ для $q \in S^3$. Если множества A_q являются

подмногообразиями коразмерности один, в силу того, что векторные поля X, Y являются векторными полями Киллинга, они порождают двумерное риманово слоение на S^3 [3]. Как следует из результатов работы [5], на трехмерной сфере не существуют двумерных римановых слоений. Следовательно, множество $A_q(0)$ совпадает с S^3 для всех $q \in S^3$.

Для симметричных система имеет место следующая теорема [4].

Теорема 5. Пусть система D симметрична и содержит полное векторное поле. Тогда для каждого $T \in R$ и для каждой точки $x \in M$ имеет место равенство $A_x(T) = L(x)$.

Заметим, что система векторных полей D называется симметричной, если из $X \in D$ вытекает, что $-X \in D$.

В следующем примере множества $A_q(0)$ являются подмногообразиями орбиты $L(p)$ коразмерности один.

Пусть $M = R^3$, D состоит из следующих векторных полей

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, Y = \frac{\partial}{\partial z}.$$

В этом случае для каждой точки $p(x, y, z) \in M$, такой, что $x^2 + y^2 > 0$ орбита $L(p)$ является цилиндром, а множество $A_q(0)$ для каждой точки $q \in L(p)$, является винтовой линией, касательным полем которой является векторное поле $Z = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}$. Для точек оси OZ орбиты $L(p)$ и множества $A_q(0)$ совпадает с осью OZ .

Литература

1. Agrachev A. A., Sachkov Y. L. *Control Theory from the Geometric Viewpoint.*- Springer-Verlag, Berlin, 2004, 412.
2. Азамов А. А., Нарманов А. Я. *О предельных множествах орбит систем векторных полей.* Дифференциальные уравнения. 2004, Т. 40, №2, С. 257-260.
3. Нарманов А. Я., Сайтова С. *О геометрии орбит векторных полей Киллинга.* Дифференциальные уравнения. 2014, том 50, №12, с.1582-1589.
4. Нарманов А. Я., Сайтова С. *О геометрии множества достижимости векторных полей.* Дифференциальные уравнения. 2017, том 53, №3, с.321-326.
5. Нарманов А. Я., Касымов О. *О геометрии сингулярных римановых слоений.* Узб.мат.жур. 2011, №3, стр 113-121.
6. Hermann R. *A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fiber bundle.* Proc. Amer. Math. Soc. 1960, Soc.11, 236-242.

7. **Jurdjevich V.** *Attainable sets and controllability: a geometry approach.* Lecture Notes Econ and Math. Systems. 1974, 106, p.219-251.
8. **Levitt N., Sussmann H.** *On controllability by means of two vector fields.* SIAM J. Control, 13, №6, November, 1975.
9. **Sussmann. H.** *Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities.* Bull. Amer. Math. Soc., 1973, 79, p. 197-199.

АЛГЕБРА ЛИ ГРУППЫ СИММЕТРИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Нарманов О. А.

*Ташкентский университет информационных технологий (НИЦ ИКТ), Ташкент,
Узбекистан, otabek.narmanov@mail.ru*

В последнее время алгебраические и геометрические методы широко применяются в различных областях математики, в том числе при исследовании уравнений математической физики [1], [4], [5].

Группы симметрий систем дифференциальных уравнений в частных производных можно использовать для того, чтобы найти частные типы решений, которые являются инвариантными относительно группы симметрий уравнения. Эти инвариантные решения находятся решением редуцированной системы дифференциальных уравнений, содержащей меньшее число независимых переменных, чем исходная система уравнений. Например, решение уравнение с частными производными от двух независимых переменных, инвариантные относительно заданной однопараметрической группы симметрий, находятся решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Класс инвариантных относительно группы решений включает в себя классические автомодельные решения, происходящие из групп симметрий растяжений, бегущие волны, отражающие некоторую инвариантность системы относительно сдвига, а также многие другие точные решения, имеющие непосредственное математическое или физическое значение. Для многих нелинейных систем они являются единственными явными точными решениями.

Инфинитезимальные образующие группы симметрий (группы Ли) являются векторными полями. Множество $V(M)$ всех гладких векторных полей на многообразии M является линейным пространством над полем действительных чисел и является алгеброй Ли

относительно скобки Ли $[X, Y]$ векторных полей X, Y . Для подмножества $D \subset V(M)$ векторных полей через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли, содержащую множество D .

Пусть нам дано дифференциальное уравнение порядка m

$$\Delta(x, u^{(m)}) = 0 \quad (1)$$

от n независимых от $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и q зависимых переменных $u = (u_1, u_2, \dots, u_q)$, содержащее производные от u по x до порядка m , где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X = R^n$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_q) \in R^q$.

Определение. Группа G преобразований, действующая на открытом подмножестве M пространства независимых и зависимых переменных $X \times R^q$, называется группой симметрий уравнения (1), если для каждого решения $u = f(x)$ уравнения (1) и для $g \in G$ такого, что определено $g \circ G$, то функция $\tilde{u} = g \circ f$ также является решением уравнения.

Одним из преимуществ знания группы симметрий дифференциальных уравнений состоит в том, что если нам известно решение $u = f(x)$, то в соответствии с определением функция $\tilde{u} = g \circ f$ также является решением для любого элемента g группы G , так что у нас есть возможность построить целое семейство решений, подвергая известное решение действию всевозможных элементов группы.

Для нахождения группы симметрий "продолжим" основное пространство, представляющее независимые и зависимые переменные, до пространства, представляющего также все различные частные производные, встречающиеся в уравнении.

Для данной гладкой функции $u = f(x)$, имеется индуцированная функция $u^m = pr^m f(x)$, называемая m - продолжением функции $f(x)$, которая определяется уравнениями $u_j^\alpha = \partial_j f^\alpha(x)$, где $\partial_j f^\alpha(x)$ производная порядка α функции $u = f(x)$.

Теперь мы можем заменить дифференциальное уравнение $\Delta(x, u^{(m)}) = 0$ алгебраическим уравнением, которое определяется обращением в нуль функции, которая является правой частью уравнения $\Delta(x, u^{(m)}) = 0$, определенной на $X \times U^m$. Гладкое решение дифференциального уравнения $\Delta(x, u^{(m)}) = 0$ - гладкая функция $u = f(x)$ такая, что $\Delta(x, pr^{(m)}u) = 0$. Это означает, что функция $u = f(x)$ и ее производные $u_j^\alpha = \partial_j f^\alpha$ должны удовлетворять алгебраическому уравнению

$$F(x, t, pr^{(m)}u(x)) = 0 \quad (2)$$

Процедура нахождения инфинитезимальных образующих группы симметрий дифференциальных уравнений описана в работе [5]. Это процедура использует продолжения действия группы симметрий на расширенное пространство. Инфинитезимальные образующие продолжения действия группы симметрий являются продолжениями инфинитезимальных

образующих группы симметрий основного пространства. Эту схему используем для нахождения группы симметрий одномерного уравнения теплопроводности.

Рассмотрим квазилинейное уравнение теплопроводности с коэффициентом нелинейности $k(u)$, которое описывает процесс переноса тепла в предположении, что среда является неподвижной и дополнительные источники или стоки энергии в среде отсутствуют:

$$u_t = (k(u)u_x)_x \quad (3)$$

Наибольший интерес представляет собой случай, когда коэффициент теплопроводности $k(u)$ является нелинейной функцией температуры u . Как показывают исследования, коэффициент теплопроводности в достаточно широком диапазоне изменения параметров может быть описан степенной функцией температуры ([1]-[6]), т. е. имеет вид $k = u^\sigma$, где $\sigma > 0$.

Мы рассмотрим следующее одномерное уравнение теплопроводности, которое является частным случаем уравнения (3) для $k(u) = u$:

$$u_t = (uu_x)_x \quad (4)$$

Векторное поле X , которое является инфинитезимальным образующим для группы симметрии уравнения (4) ищем в виде

$$X = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \varphi \frac{\partial}{\partial u} \quad (5)$$

Второе продолжение \tilde{X} векторного поля X на расширенное пространство переменных $(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})$ будет иметь вид:

$$\tilde{X} = X + \varphi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} \quad (6)$$

В пространстве $(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})$ уравнение (4) имеет вид:

$$F(t, x, u, u_t, u_x, u_{xx}) = 0 \quad (7)$$

где $F = u_t - u_x^2 - uu_{xx}$. Учитывая, что для функции F , стоящей в правой части уравнения (7) имеет место $\tilde{X}(F) = 0$ мы получим

$$-u_{xx}\varphi + \varphi^t - 2u_x\varphi^x - u\varphi^{xx} = 0 \quad (8)$$

Для компонент второго продолжения \tilde{X} векторного поля X используем их выражения, найденные в работе [5]:

$$\varphi^x = \varphi_x + (\varphi_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t,$$

$$\begin{aligned}\varphi^t &= \varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2, \\ \varphi^{xx} &= \varphi_{xx} + (2\varphi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_t + (\varphi_{uu} - 3\xi_{xu}) u_x^2 - 2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu} u_x^3 - \tau_{uu} u_x^2 u_t + \\ &+ (\varphi_u - 2\xi_x) u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_x u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (8) и учитывая равенства $u_t = uu_{xx} + u_x^2$ мы получим многочлен в левой части уравнения (8) относительно переменных u, u_x, u_{xx}, u_{xt} :

$$\begin{aligned}-u_{xx}\varphi + \varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t)(u_x^2 + uu_{xx}) - \xi_u u_x(u_x^2 + uu_{xx}) - \tau_u u_t^2 - 2u_x[\varphi_x + (\varphi_u - \xi_x)u_x - \\ \tau_x(u_x^2 + uu_{xx}) - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x(u_x^2 + uu_{xx})] - u[\varphi_{xx} + (2\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}(u_x^2 + uu_{xx}) + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xx})u_x^2 - \\ 2\tau_{xu}u_x(u_x^2 + uu_{xx}) - \xi_u u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2(u_x^2 + uu_{xx}) + (\varphi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}] = 0.\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при различных одночленах нулю, получим следующие определяющие уравнения для группы симметрий уравнения теплопроводности.

п/н	одночлен	определяющие уравнения
1	1	$\varphi_t = 0$
2	u	$\varphi_{xx} = 0$
3	u_x	$-\xi_t - 2\varphi_x = 0$
4	u_x	$-\xi_t - 2\varphi_x = 0$
5	u_{xx}	$-\varphi = 0$
6	uu_{xx}	$\xi_{xx} - 2\varphi_{xu} = 0$
7	$u_x u_{xx}$	$-\varphi_u + 2\xi_x + \varphi_u - \tau_t = 0$
8	u_{xx}^2	$-\tau_u + \tau_u = 0$
9	uu_{xx}	$-\varphi_u + 2\xi_x + \varphi_u - \tau_t = 0$
10	$uu_x u_{xx}$	$3\xi_u + 2\tau_u = 0$
11	uu_{xt}	$2\tau_x = 0$
12	$uu_x u_{xt}$	$-2\tau_u = 0$
13	$u_{xx} u_x^2$	$-\tau_{uu} = 0$

Из определяющего уравнения (5) таблицы получим, что имеет место равенство $\varphi = 0$. Из определяющих уравнений (11) и (12) получим, что $\tau_x = 0$, $\tau_u = 0$, т.е. функция τ зависит только от t , $\tau = \tau(t)$. Из уравнения (10) получим, что $\xi_u = 0$. Из уравнений (9) получим, что $\tau_t = 2\xi_x$. Из уравнения (3) получим, что функция ξ не зависит от переменной t , т.е. $\xi_t = 0$. Следовательно, $\xi = \xi(x)$. Уравнение (6) показывает, что $\xi_{xx} = 0$ т.е. ξ линейной функцией от x : $\xi = ax + b$. Поскольку имеет место $\tau_t = 2\xi_x$, получаем, что $\tau_t = 2a$ т.е. $\tau = \tau(t) = 2at + d$. Таким образом $\xi = ax + b$, $\tau = 2at + d$, где a, b, d — произвольные постоянные и в результате получим, что

$$X = (ax + b) \frac{\partial}{\partial x} + (2at + d) \frac{\partial}{\partial t}.$$

Отсюда следует, что алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий

уравнения порождается следующими векторными полями

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}. \quad (9)$$

Обозначим через D множество, состоящее из трех векторных полей (9). Легко проверить, что для скобок Ли этих векторных полей имеют места $[X_1, X_2] = 0$, $[X_1, X_3] = 2 \frac{\partial}{\partial t}$, $[X_2, X_3] = \frac{\partial}{\partial x}$. Тем самым доказана следующая

Теорема. *Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий уравнения (4) является трехмерной алгеброй Ли.*

Литература

1. Брюно А. Д. *Автомодельные решения и степенная геометрия*. УМН, 2000, том 55, выпуск 1(331), с. 3-44.
2. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. *Динамические системы и модели биологии*. Москва, Физматлит, 2010 г, 400 стр.
3. Волосевич П. П., Леванов Е. И. *Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса*. Москва, Изд. МФТИ., 1997, 235 стр.
4. Ибрагимов Н. Х. *Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений*. Математика-кибернетика, Москва, Знание, 1991, 48 стр.
5. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*. Москва, Мир, 1989, 639 стр.
6. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*. Москва, Наука, 1987, 481 стр.

СИСТЕМА ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЦЕЛОСТНОСТИ АИС РАБОТАЮЩИХ НА ОСНОВЕ СУБД

Неъматова Д. Э.

В настоящей работе применяются математические модели теории компьютерной безопасности для обоснования возможности создания системы обеспечения целостности (СОЦ) для защиты автоматизированных информационных систем (АИС) типовой архитектуры от атак со стороны нарушителя, соответствующего сформулированной модели

нарушителя. Также определяются необходимые свойства резидентного компонента безопасности как ядра СОЦ. Одной из наиболее часто используемых моделей защиты информации в АИС является субъектно-ориентированная модель (СО-модель) и связанная с ней концепция изолированной программной среды (ИПС). Изолированная программная среда это совокупность (множество) программ, в которой:

- Никакая активизированная программа не влияет на другую активизированную программу;
- Никакая активизированная программа не влияет на данные, которые используются для (активизации)создания другой программы;
- Каждая программа может использовать только те данные, которые ей разрешено использовать политикой безопасности;
- Каждая программа может активизировать только те программы, целостность которых установлена и активизация которых ей разрешена политикой безопасности;

В силу архитектуры рассматриваемой АИС и сформулированной модели нарушителя полное выполнение требований базовой теоремы о генерации ИПС является невозможным, поскольку в роли "программы" может выступать либо используемый нарушителем программный продукт, не являющийся частью АИС, либо модифицированный нарушителем компонент АИС.

Решение задачи исследования может быть достигнуто расширением ИПС до доверенной вычислительной среды (ДВС). ДВС принадлежит классу СО-моделей и позволяет выполнить более точный учт особенностей АИС типовой архитектуры и модели нарушителя.

ДВС представляет собой фрагмент среды взаимодействия компонентов АИС, для которого установлена и поддерживается в течение заданного интервала времени целостность объектов, целостность взаимосвязей между ними выполняемых функций .

Литература

1. Алферов А. П., Зубов А. Ю., Кузьмин А. С, Черемушкин А. В. *Основы криптографии* . 3-е изд., испр. и доп. М.: Гелиос АРБ, 2005.
2. Девянин П. Н. *Модели безопасности компьютерных систем*. М:Издательский центр «Академия», 2005, - 144 с.
3. Архипочкин Евгений Витальевич. *Метод обеспечения целостности информации в автоматизированных информационных системах, функционирующих на основе систем управления базами данных* . МОСКВА - 2009.

О ГОЛОМОРФНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ВДОЛЬ КОНЕЧНЫХ СЕМЕЙСТВ КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ В n -КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

Отемуратов Б. П.

Каракалтакский государственный университет, Нукус, Узбекистан,
bayram_utemurato@mail.ru

Пример Глобевника [1] показывает, что для функций непрерывных на границе шара n точек не достаточно для голоморфного продолжения. В работе [2] рассмотрены семейства комплексных прямых, проходящих через конечное $(n + 1)$ число точек, лежащих в n -круговой области D в \mathbb{C}^n и f непрерывных на границе. В данной работе мы обобщаем этот результат для интегрируемых функций.

Пусть D – полная строго выпуклая ограниченная область в \mathbb{C}^n с гладкой границей и с центром в нуле, т.е. вместе с каждой точкой $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) \in D$ она содержит поликруг

$$\{z \in \mathbb{C}^n : |z_k| \leq |z_k^0|, k = 1, \dots, n\}.$$

Обозначим $D^+ = \{(|z_1|, \dots, |z_n|) : z \in D\}$ образ области D в абсолютном октанте

$$\mathbb{R}_n^+ = \{(x_1, \dots, x_n) : |x_k| \geq 0, k = 1, \dots, n\}.$$

Пусть $\partial D^+ = \{(|z_1|, \dots, |z_n|) : z \in \partial D\}$.

Рассмотрим конечную меру μ на ∂D^+ . Мера μ является массивной на границе Шилова [3, §11], если для любого множества $E \subset \partial D^+$ нулевой меры μ выполняется условие $\overline{\partial D^+ \setminus E} \supset S(D^+)$, где $S(D^+)$ – образ границы Шилова $S(D)$ в абсолютном октанте. В нашем случае $S(D^+) = \partial D^+$. Из теоремы 3.1 [4] следует, что мера Лебега μ на границе такой области является массивной. В дальнейшем будем всегда предполагать, что мера μ массивна.

Определим ядро Сеге области D

$$h(\bar{\zeta}, z) = \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha \bar{\zeta}^\alpha z^\alpha, \tag{-3}$$

где

$$a_\alpha = \frac{1}{\int_{\partial D^+} |\zeta|^{2\alpha} d\mu} = \frac{1}{\int_{\partial D^+} |\zeta_1|^{2\alpha_1} \cdot \dots \cdot |\zeta_n|^{2\alpha_n} d\mu}$$

а $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – мультииндекс такой, что $\alpha \geq 0$ (т.е. $\alpha_k \geq 0, k = 1, \dots, n$) и $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}$, $\|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Напомним определение класса функций $\mathcal{H}^p(D)$.

Голоморфная функция $f \in \mathcal{H}^p(D)$ ($p > 0$), если

$$\sup_{\epsilon > 0} \int_{\partial D} |f(\zeta - \epsilon \nu(\zeta))|^p d\sigma < +\infty,$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности ∂D , а $\nu(\zeta)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂D в точке ζ . Хорошо известно, что нормальные граничные значения функции $f \in \mathcal{H}^p(D)$ принадлежат классу $\mathcal{L}^p(\partial D)$ (по мере $d\sigma$).

Существование ядер Сеге в n -круговых областях дается следующей теоремой :

Теорема 1. Пусть на ∂D^+ задана конечная мера μ . Для того чтобы для любой функции $f \in \mathcal{H}^p(D)$, ($p \geq 1$), существовало интегральное представление Сеге

$$f(z) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D^+} d\mu \int_{\Delta_{|\zeta|}} f(\zeta) h(\bar{\zeta}, rz) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in D, \quad (-3)$$

где

$$\Delta_{|\zeta|} = \{\zeta : \zeta_1 = |\zeta_1| e^{i\theta_1}, \dots, \zeta_n = |\zeta_n| e^{i\theta_n}, 0 \leq \theta_k \leq 2\pi, k = 1, \dots, n, |\zeta| \in \partial D^+\},$$

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \wedge \dots \wedge \frac{d\zeta_n}{\zeta_n},$$

а ядро Сеге $h(\bar{\zeta}, z) = h(\bar{\zeta}_1 z_1, \dots, \bar{\zeta}_n z_n)$ при фиксированном $z \in D$ входило по $\bar{\zeta}$ в $\mathcal{O}(\bar{D})$, а при фиксированном $\zeta \in \partial D$ входило по z в $\mathcal{O}(D)$, необходимо и достаточно, чтобы мера μ была массивной.

Литература

1. **Globevnik J.** *Small families of complex lines for testing holomorphic extendibility.* Amer. J. of Math. 2012, no. 6, pp. 1473-1490.
2. **Кытманов А. М., Мысливец С. Г.** *О голоморфном продолжении функций вдоль конечных семейств комплексных прямых в n - круговой области.* журнал СФУ. Математика и физика, 5(2012), no. 4, 547–557.
3. **Айзенберг Л. А., Южаков А. П.** *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.* Новосибирск, Наука, 1979.
4. **Хенкин Г. М.** *Метод интегральных представлений в комплексном анализе.* Итоги науки техники. Современные проблемы математики, т.7, М., 1985, 101 с.

ОБ ОДНОМ КАНОНИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИИ

Пренов Б. Б.

Нукусский государственный педагогический институт, Нукус, Узбекистан,
prenov@mail.ru

Рассматривается задача Дирихле — нахождение гармонической функции в области с заданными предельными значениями на границе. Получено каноническое представление гармонической функции в области, равных нулю на границе, за исключением единственной точки. Оно может служить аналогом разложение Лорана для гармонических функций.

О ДЕЛЬТА-ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА–ДАРБУ

Родионова И. Н., Долгополов В. М., Долгополов М. В.

Лаборатория математической физики, Самарский университет, Самара, Россия,
mikhaildolgopolov68@gmail.com

Вырождающиеся гиперболические уравнения встречаются при решении многих важных задач динамических системах и вопросов прикладного характера (теории бесконечно малых изгибаний поверхностей вращения, безмоментной теории оболочек, в магнитной гидродинамике, в газовой динамике). При всем разнообразии вырождающихся уравнений и краевых условий, удачно подобранных к заданному дифференциальному уравнению, последнее в характеристических координатах редуцируется к уравнению Эйлера–Дарбу.

Некоторые краевые задачи (в частности, задача Коши) для указанного уравнения потребовали введения специальных классов, в которых формула решения приобретает более простой вид и может быть использована для решения новых задач, в том числе, дельта(Δ)-задач в квадратах, содержащих линию сингулярности коэффициентов уравнения с данными на смежных, или параллельных сторонах квадрата (постановка А.М. Нахушева).

В настоящей работе рассмотрено обобщенное уравнение Эйлера–Дарбу с отрицательными параметрами

$$U_{\xi\eta} - \frac{p}{\eta - \operatorname{sgn}\eta \cdot \xi} U_{\xi} + \frac{p}{\operatorname{sgn}\eta \cdot \eta - \xi} U_{\eta} - \operatorname{sgn}\eta \lambda U = 0, \quad (1)$$

$0 < p < \frac{1}{2}$, $|\lambda| < \infty$ в прямоугольной области D , ограниченной характеристиками уравнения (1) $\xi = 0$, $\xi = h$, $\eta = h$, $\eta = -h$ ($h > 0$), содержащей внутри себя две линии

сингулярности коэффициентов уравнения $\eta = \xi$ и $\eta = -\xi$. Для уравнения (1) в области D исследована постановка краевых задач Δ_2 с заданными значениями искомого решения на параллельных сторонах прямоугольника, с условиями сопряжения относительно решения и его нормальных производных как на линиях сингулярности коэффициентов, так и на внутренней характеристической линии. Методом интегральных уравнений исследована разрешимость поставленных задач. Задачи решаются в специальном классе, введенном авторами.

Литература

1. Долгополов В. М., Долгополов М. В., Родионова И. Н. *Построение специальных классов решений некоторых дифференциальных уравнений гиперболического типа*. Доклады Академии Наук. 2009. Т. 429. № 5. с. 583-589.
2. Долгополов М. В., Родионова И. Н. *Задачи для уравнений гиперболического типа на плоскости и в трехмерном пространстве с условиями сопряжения на характеристике*. Изв. РАН. Сер. матем., 2011, Т. 75, № 4. с. 21-28.
3. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи*. М.: Наука, 3-е издание, 1977, 640 с.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА ГОНЧАРА НА ВСЮ ПЛОСКОСТЬ

Садуллаев А. С.¹, Ибрагимов З. Ш.²

¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, sadullaev@mail.ru

²Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан, z.ibragim@gmail.com

Класс R был введен и исследован в серии фундаментальных работ А. А. Гончара [1]-[3]: будем говорить, что росток f аналитической функции в точке $0 \in \mathbb{C}$ принадлежит классу R^0 , $f \in R^0$, если в некоторой окрестности нуля $\bar{B} = \bar{B}(0, r)$, $r > 0$ она допускает быструю рациональную аппроксимацию. Точнее,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m^{1/m}(f, \bar{B}) = 0,$$

где ρ_m — отклонение f от класса рациональных функций $\{r_m : \deg r_m \leq m\}$. Верхний индекс "0" здесь указывает, в какой точке рассматривается росток. Одним из замечательных свойств функций из R , доказанного А. А. Гончаром является их однозначность в пространстве \mathbb{C} : естественная область существования $W_f \subset \mathbb{C}$. Класс R и его свойства нашли

ряд приложений в самой теории аппроксимации, в вопросах аналитического продолжения функций с тонкими особенностями (см. [5]), в теории плюрипотенциала (см. например [4], и др.

В этой работе мы докажем следующие теоремы

Теорема 1. Если $f \in R^0$ имеет конечный порядок $t < \infty$, то она тонко - аналитически продолжается на всю плоскость \mathbb{C} , т.е. существует тонко-аналитическая на всей плоскости \mathbb{C} функция $\tilde{f}(z) : \tilde{f}|_U \equiv f$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 последовательность рациональных функций $\{r_m(z)\}$ всюду на плоскости \mathbb{C} по емкости быстро сходится к тонко - аналитической функции \tilde{f} :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C \left\{ z \in B(0, R) : |r_m(z) - f(z)|^{1/m} > \varepsilon \right\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad R > 0.$$

Литература

1. Гончар А. А. Локальное условие однозначности аналитических функций. Мат. сб., 1972, Т.89(131), 148-164.
2. Гончар А. А. О сходимости аппроксимаций Паде. Мат. сб., 1973, Т. 92 (134), 152-164.
3. Гончар А. А. Локальное условие однозначности аналитических функций нескольких переменных. Мат. сб., 1974, Т. 93 (135), 296-313.
4. Садуллаев А. Плюрисубгармонические функции. Коллективная монография, М.,ВИНИТИ, Современные проблемы математики, 1985, Т.8, 65-111.
5. Садуллаев А., Имомкулов С. А. Продолжение голоморфных и плюригармонических функций с тонкими особенностями на параллельных сечениях. Труды Математического Института им. В.А. Стеклова, 2006, Т.253, 158-174.

ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ–РИМАНА В МНОГОМЕРНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ

Сатторов Э. Н., Эрмаматова Ф. Э.

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,
sattorov-e@rambler.ru

Пусть R^n — вещественное n -мерное евклидово пространство, Ω — ограниченная односвязная область в R^n с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, состоящей из компактной связной части T плоскости $y_n = 0$ и гладкой поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_n > 0$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega = T \cup S$, $F_1(x), F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$ — вектор-функции, которые имеют в этой области непрерывные производные первого порядка.

Рассматривается критерий разрешимости решения системы уравнений (см. [1], [2])

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} + H_i F_i \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_j} - H_k F_j + H_j F_k = 0, (k, j = 1, \dots, n), \quad (1)$$

которая является n - мерным аналогом обобщенной системы Коши-Римана, по известным данным Коши на поверхности S :

$$F(y) = f(y), y \in S, \quad (2)$$

где $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$ — заданная на S непрерывная вектор-функция, $H = (H_1, H_2, \dots, H_n)$ — заданный постоянный вектор.

Из работы [4] согласно теореме 1 можно сформулировать критерий разрешимости задачи Коши. При этом рассмотрим матрицу

$$M_\sigma(y, x; H) = \|L_k^*(\alpha; 0)V^k\|, \quad (3)$$

где $V^k = (v_1^1, \dots, v_n^k)$ определяется равенством

$$v_k^i(y, x) = \left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_k} - H_k \Phi_\sigma \right) \cdot \text{sign}(k - i), i \neq k, v_i^i(y, x) = \left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_i} + H_i \Phi_\sigma \right), \quad (4)$$

а функция $\Phi_\sigma(y, x; \lambda)$ при $s \geq 0, v \geq 1$ определяется следующим равенством:

$$C_n e^{-\sigma x_n^2} \Phi_\sigma(y, x; \lambda) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \int_0^\infty \text{Im} \left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w} \right] \frac{\psi(\lambda u)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du, w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_n, \quad (5)$$

где

$$\psi(\lambda u) = \begin{cases} uJ_0(\lambda u), & n = 2m, m \geq 1, \\ \cos(\lambda u), & n = 2m + 1, m \geq 1 \end{cases}$$

$J_0(\lambda u)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Теорема 1. Пусть $S \subset C^2$, $f(y) \in C(S_0) \cap L(S)$, где S_0 – множество внутренних точек S (S – без края). Тогда для существования решения системы (1), удовлетворяющий условию (2) необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in R^n$ с условием $0 < x_n < 2a$, сходился (равномерно при $\delta < x_n \leq 2a - \delta$, $0 < \delta < a$) несобственный интеграл

$$\left| \int_1^\infty I(\sigma, x) d\sigma \right| < \infty, \quad (6)$$

где

$$I(\sigma, x) \equiv \frac{dq_\sigma}{d\sigma}(x) = \int_S N_\sigma(y - x; H) f(y) dS_y, \quad (7)$$

здесь

$$N_\sigma(y - x; H) = \frac{dM_\sigma}{d\sigma}(y - x; H).$$

Если условие (2) выполнено, то аналитическое продолжение осуществляется эквивалентными формулами

$$F(x) = \int_1^\infty I(\sigma, x) d\sigma + E(x) + \int_S M_0(r; H) f(y) dS_y, \quad (8)$$

и

$$F(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} F_\sigma(x) \equiv \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_S M_\sigma(y, x; H) F(y) dS_y, \quad (9)$$

где функция $E(x)$ – регулярное решение системы (1) в R^n .

Литература

1. **Оболашвили Е. И.** Обобщенная система Коши-Римана в многомерном евклидовом пространстве. Сборник трудов конференции "Комплексный анализ" ГДР, Гале, 1976.
2. **Оболашвили Е. И.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Труды Тбилисского Математического института, 1978, 58, 168-173.
3. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974.

4. Сатторов Э. Н., Эрмаматова Ф. Э. О восстановлении решений обобщенной системы Коши-Римана в многомерной пространственной области/ Труды V-международной конференции Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий -Аль-Хоразмий, Бухара, Узбекистан, 9-10 ноября 2016, 398-401.

О БИОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ С ТАКСИСОМ

Тахиров Ж., Умирханов М.

Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан, prof.takhirov@yahoo.com

Характерной особенностью живых систем является движение особей по направлению к внешнему стимулу (или от него), называемое таксисом.

При построении математических моделей многих биофизических и экологических процессов (развитие ткани, формирования колоний бактерий, распространения эпидемий и т.п.) придется учитывать таксиса (см.напр. [1,2]).

Хемотаксис, при котором происходит движение особей по направлению к веществу (аттрактант), которое продуцируется самими особями популяции, является одним из основных механизмов, приводящим к образованию устойчивых пространственно неоднородных распределений в виде "паттернов"или "пятен плотности" популяции.

При исследовании процессов с таксисом возникают модели типа "реакция-кросс-диффузия"с существенной нелинейностью.

В настоящей работе исследуем модель, предложенная в работах [1,2] в виде системы параболических уравнений

$$\begin{cases} u_t = a_1 u_{xx} + b_1 u \left(1 - \frac{u}{k}\right) - c_1 f(u, v), \\ v_t = a_2 v_{xx} + (vw)_x - b_2 v + c_2 f(u, v), \\ w_t = a_3 w_{xx} + b_3 u_x. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $u(t, x)$ - плотность жертв, $v(t, x)$ - плотность хищников, $w(t, x)$ - скорость хищников, a_i - коэффициенты диффузии, $i = \overline{1, 3}$, b_1 - скорость размножения жертв, k - максимальное количество жертв, b_2 - скорость размножения хищников, b_3 - коэффициент таксиса хищников, $f(u, v)$ - функция отклика.

Для системы (1) в области $D = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < l\}$ рассматривается задача

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad v(0, x) = \varphi_2(x), \quad w(0, x) = \varphi_3(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, l) = v_x(t, 0) = v_x(t, l) = w(t, 0) = w(t, l) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

В работах [1,2] для задачи (1)-(3) изучены волновые автомодельные решения и фазовые кривые, проведены некоторые численные эксперименты.

Нами исследована проблема однозначной глобальной разрешимости задачи (1)-(3). Установлены априорные оценки норм Гельдера. Доказаны теоремы единственности и существования.

Литература

1. **Chakraborty A. et al.** *Predator-prey model with prey-taxis and diffusion.* Math. and comp.model., 2007, 46, 482-498.
2. **Sapoukhina N. et al.** *The Role of Prey Taxis in Biological Control: A Spatial Theoretical Model.* The American Naturalist, 2003, 162 (1), 61-76.

ИНВАРИАНТНЫЕ МЕТРИКИ В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

Тишабаев Ж. К.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, jura63@rambler.ru

Задача нахождения условий биголоморфной эквивалентности областей в многомерном комплексном пространстве является одной из важных задач. Один из подходов решения этих задач основан на изучении инвариантных метрик таких областей. Работа посвящена нахождению условий для биголоморфной эквивалентности областей к матричному шару, матричному поликругу и классическим областям.

ELCUT DASTURINING FAN VA TAЪЛИMДАГИ ЎРНИ

Тожибоев А., Қўчқоров Х., Умаров А.

Наманган давлат университети, Наманган, Ўзбекистон

Ҳозир вақтда сонли моделлаштириш муҳим аҳамиятга эга, чунки тажриба йўли билан ўрганиш жуда мураккаб ва қimmat, чки иложи бўлмайдиган иссиқлик энергетикаси, авиация ва атом энергетикаси объектлари учун иссиқлик жарачнларнинг ишончли

башорати жуда зарур бўлади. Шу жиҳатдан моделларни физик хоссаларини, хусусан, иссиқлик ўтказувчанлик жарачнларини сонли моделлаштириш турли илмий-тадқиқот, лойиҳа-конструкторлик ва ишлаб чиқариш ташкилотлар ишланмалари амаличтида тобора муваффақиятли қўлланиб келмоқда [1].

Моделлаштиришда қўлланиладиган усуллардан бири чегаравий элементлар усули (ЧЭУ) бўлиб, у яхлит муҳит механикасининг, иссиқлик- ва масса алмашинувининг, электр- ва магнитостатиканинг кенг қамровли масалаларини, ва фан-техниканинг кўплаб бошқа масалаларини универсал ечиш усулларидан бири ҳисобланади [1]. ELCUT тизими [3] ЧЭУ нинг текисликдаги ва симметрия ўқиға эға (икки ўлчовли) қўйидаги масалаларни ҳисоблаш учун мўлжалланган: чизиқли ва ночизиқли магнитостатика; ўзгарувчан тоқларнинг магнит майдони (уюрмали тоқларни ҳисобға олган ҳолда); электростатика; ўтказувчан муҳитда тоқларнинг қйилиши; чизиқли ва ночизиқли иссиқлик ўтказувчанлик; кучланганлик-деформацион ҳолатнинг чизиқли таҳлили; боғланган (кўп йўналишли) масалалар ва ҳ.к. ELCUT дастурининг бир қатор афзалликлари: содда фойдаланувчи интерфейси, моделларни тушунтирилишининг оддийлиги, комплекснинг кенг аналитик имкониятлари ва барча амалларни юқори даражадаги автоматлаштирилганлиги фан ва таълимда қўллаш имкониятини беради.

Моделлар таҳрирловчисида тезда ўрганилаётган объектларнинг моделини тузишға имкон беради. Дастурда фойдаланувчи томонидан берилган чизиқларда, сиртларда қй ҳажмларда турли интеграл катталиқларни ҳисоблаш ва AutoCAD қки бошқа лойиҳалаш тизимларидан моделларни импорт қилиш мумкин. Ютуқлар билан бир қаторда ELCUT дастурида бир қатор камчиликлари қам мавжуд: икки ўлчамли геометрик модель, чегаравий элементнинг бир қўриниши (фақат учбурчак тури)дан фойдаланилади кабилар киради.

Ҳозирги иқтисодий-ижтимоий ва техник-маиший талабларни қониқтирадиган нуқсонларсиз буюм ва маҳсулотлар олиш жуда муҳимдир. Шу жиҳатдан, юқорида келтирилган моделлаштирувчи дастурий таъминотлардан бири, яъни ELCUT орқали вақтни тежовчи, арзон ва таълим жарачнида қўллаш мумкин бўлган тажрибалар ўтказиш имконини беради. Бу эса фан ва таълимни ривожланишида самарали омил ҳисобланади.

Адабичтлар

1. Норри Д., Ж. де Фриз. *Введен. в метод конеч. Элем.* Москва : Мир, 1981, - 304 с.
2. Жуков Н. П., Майникова Н. Ф., Ниқулин С. С., Антонов О. А. *Реш. зад. теплопров. метод. конечн. элемен.: уч. пос.* Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО "ТГТУ", 2014. - 80 с.
3. *ELCUT: Моделир. двумерн. полей метод. конеч. элем-тов.* Вер. 5.1. Руков. польз.

- С.-Пб. : TOP, 2003, - 249 с. <http://www.elcut.ru/demo/manual.pdf>.

ε – ПОЗИЦИОННЫЕ СТРАТЕГИИ В ПЕРВОМ ПРЯМОМ МЕТОДЕ ПОНТРЯГИНА В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Тухтасинов М. Т.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, mumin51@mail.ru

Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Cz - u + v, \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор; $u \in P$, $v \in Q$ – параметры управления; C – постоянная матрица порядка $n \times n$; P, Q – непустые компактные подмножества пространства \mathbb{R}^n ; терминальным является непустое подмножество M пространства \mathbb{R}^n .

Движение точки z начинается при $t = 0$ из начального положения $z_0 \notin M$ и протекает по соответствующей траектории уравнения (1), под воздействием измеримых управлений $u(t) \in P$ и $v(t) \in Q$ при $t > 0$.

Лемма. Пусть $\{\tau_i\}_{i=0}^k$ – последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, таких, что $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \tau$. Тогда верно следующее включение

$$\int_0^\tau \left(e^{-sC} P * e^{-sC} Q \right) ds \subset \sum_{i=1}^k \left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{-sC} P ds * \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{-sC} Q ds \right) \quad (2)$$

Доказательство этой леммы следует из аддитивности интеграла и следующего включения

$$\int_a^b \left(F(s) * G(s) \right) ds \subset \int_a^b F(s) ds * \int_a^b G(s) ds,$$

справедливость которого, в свою очередь, следует из следующих рассуждений. Пусть $h \in \int_a^b \left(F(s) * G(s) \right) ds$. Тогда по определению интеграла существует интегрируемая однозначная ветвь $h(s)$, $a \leq s \leq b$ многозначного отображения $F(s) * G(s)$, такая, что имеет место равенство

$$h = \int_a^b h(s) ds. \quad (3)$$

По определению операции геометрической разности, имеем $h(s) + G(s) \subset F(s)$, $a \leq s \leq b$. Проинтегрируем обе части этого включения в пределах от a до b . Тогда получаем

$$\int_a^b h(s) ds + \int_a^b G(s) ds \subset \int_a^b F(s) ds$$

или

$$\int_a^b h(s) ds \in \int_a^b F(s) ds \overset{*}{\setminus} \int_a^b G(s) ds.$$

Отсюда и из (3) получим требуемое включение (2). Пусть $\varepsilon > 0$, $W \subset \mathbb{R}^n$. Через $L(\varepsilon, W)$ обозначим совокупность всех измеримых функций $\omega(\cdot) : [0, \varepsilon] \rightarrow W$ [2].

Определение 1. ε – позиционной стратегией преследователя назовем отображение

$$P_\varepsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow L(\varepsilon, P).$$

Определение 2. ε – позиционной стратегией убегающего назовем отображение

$$Q_\varepsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow L(\varepsilon, Q).$$

Условие. Для произвольных $0 \leq a < b$, $t \geq 0$ имеет место включение

$$\int_a^b e^{-sC} P ds \subset \int_a^b e^{-(t+s)C} P ds.$$

Определение 3. Будем говорить, что из начальной точки z^0 можно завершить игру преследования к моменту времени τ , если для любого положительного числа α существуют число $\varepsilon = \tau/k$, $k \in N$ и ε – позиционная стратегия преследователя $P_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ так, что при любой ε – позиционной стратегии $Q_\varepsilon(\cdot)$ убегающего, для соответствующего решения $z(t)$, $0 \leq t \leq \tau$ системы (1) имеет место включение $z(\tau) \in M_\alpha$, где M_α – α окрестность множества M .

Рассмотрим следующее гипотетическое включение

$$e^{\tau C} z_0 \in M + \int_0^\tau \left(e^{(\tau-s)C} P \overset{*}{\setminus} e^{(\tau-s)C} Q \right) ds. \quad (4)$$

Теорема. Пусть для данного начального положения $z^0 \notin M$ и некоторого момента времени τ выполнены включение (4) и условие. Тогда из начальной точки z^0 можно завершить игру преследования к моменту времени τ .

Пример. Пусть $C = \lambda E$, $\lambda \leq 0$, $P = \rho K$, $Q = \sigma K$, $M = K$, $\rho > \sigma$, где K является единичным кубом с центром в нуле пространства \mathbb{R}^n ; E – единичная матрица порядка $n \times n$. Тогда выполнены все условия теоремы, так что из любого начального положения $z^0 \in \mathbb{R}^n$ можно закончить преследование.

Литература

1. **Понтрягин Л. С.** *Линейные дифференциальные игры преследования.* Матем. сборник, 1980, 3(7), 307-331.
2. **Azamov A.** *On Pontryagin's second method in linear differential games of pursuit.* Math. USSR-Sb., 1983, 46(3), 307-331.

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ТЕОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ИНЖЕНЕРИИ И ЯЗЫКАХ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ходиев Ш. И.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, ilch1@rambler.ru

Методы формальных преобразований заключаются в автоматическом построении программы на основе ее формального описания. Преобразования позволяют математически корректно трансформировать исходные спецификации в код целевой программной системы. Несмотря на то, что к настоящему времени разработаны тысячи различных языков и их компиляторов, процесс создания новых приложений в этой области не прекращается. Это связано с развитием технологии производства вычислительных систем, с необходимостью решения все более сложных задач. Продолжается выполнение программных проектов различного назначения по актуальным проблемам программирования.

Разработка сложных программных систем использует более одного языка программирования - даже в рамках одного файла с исходным кодом. Как примеры, отметим разработку алгоритмов для решения задач узбекской компьютерной лингвистики, или исследования по морфологическому анализу естественных языков аналитического типа [1], в число которых входит узбекский и таджикские языки с задачами автоматизации (т.е. компьютерной обработки) такого анализа. Они проводятся в Самаркандском и Бухарском государственных университетах. Корректность обеспечивают математические аппараты анализа формальных языков, широко используемых не только в процессе проектирования языковых процессоров или языковых обработчиков, но и при анализе текста, в том

числе для различных не только искусственных, но и естественных языков. Отмечают, что такие исследования имеет смысл продолжать.

Значение применений методов теории определяется также тем, что формальные методы занимаются приложением довольно широкого класса фундаментальных дисциплин теоретической информатики: разные исчисления логики, формальных языков, теории автоматов, формальной семантики, систем типов и алгебраических типов данных. Также, они с необходимостью используются при выборе материалов для самостоятельной подготовки студентов (магистров и бакалавров) к выполнению дипломных, курсовых, работ, в том числе не только по разработке компиляторов. Они широко используются в обучении студентов программной инженерии, языкам программирования всех уровней. Рабочие и учебные программы соответствующих курсов Национального университета Узбекистана и Ташкентского университета информационных технологий включают, в частности, разработку и программирование алгоритмов лексического, синтаксического и семантического анализов, построения анализаторов, построение генератора лексического анализатора, алгоритмы и сопоставление линейной последовательности лексем естественного или формального языка с его формальной грамматикой. Также, построение оптимизирующего компилятора получения более оптимального программного кода при сохранении его функциональных возможностей: Peephole- оптимизацию, локальную оптимизацию, межпроцедурную и внутрипроцедурную оптимизации, оптимизацию циклов, кодогенерацию, конвертирование корректной программы в последовательность инструкций, выполняемые на машине.

Литература

1. **Абдурахимов Б. Ф., Ходиев Ш. И.** *Технологии создания больших программных комплексов. Учебное пособие.* Ташкент, изд. Voris, 2014, -320 с.
2. **Кобилов С. С., Ходиев Ш. И.** *Технология проектирования и локализации программных систем с адаптируемым интерфейсом* . Узбекский журнал "Проблемы информатики и энергетики" АН РУз. - 2013, No 1- 2. Ташкент, с. 87-92.
3. **Ходиев Ш. И., Болтаев Т. Б.** *О содержании курса "Алгоритмические языки высокого уровня"*. Математическая физика и родственные проблемы современного анализа, 2015 г, с. 527-529.

ОБ ОДНОМ МНОЖЕСТВЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Худайбергенов Г.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, gkhudaiberg@mail.ru

1. Множество

$$B_n[m \times k] = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times k] : I^{(m)} - \langle Z, Z \rangle > 0\}$$

будем называть «обобщенным матричным шаром» в пространстве прямоугольных матриц $\mathbb{C}^n[m \times k]$. Здесь $\langle Z, Z \rangle = Z_1 Z_1^* + Z_2 Z_2^* + \dots + Z_n Z_n^*$, $Z_j \in \mathbb{C}[m \times k]$ – матрицы размерности $[m \times k]$, $Z_j^* = \bar{Z}'_j$ – сопряженные и транспонированные матрицы к Z_j , $I^{(m)}$ – единичная $[m \times m]$ – матрица, $I^{(m)} - \langle Z, Z \rangle > 0$ означает, что эрмитова матрица $I^{(m)} - \langle Z, Z \rangle$ – положительно определена, т.е. все ее собственные значения положительны.

В частности: при $m = k$, $B_n[m \times m]$ – матричный шар в пространстве $\mathbb{C}^n[m \times m] \cong \mathbb{C}^{nm^2}$;

при $m = k = 1$, $B_n[1 \times 1]$ – обычный шар в пространстве \mathbb{C}^n ;

при $n = m = k = 1$, $B_1[1 \times 1]$ – единичный круг в комплексной плоскости \mathbb{C} ;

при $n = 1$, $B_1[m \times k]$ – классическая область Картана первого типа;

при $n = 1, m = k$, $B_1[m \times m]_{\mathbb{C}} = \{Z_1 \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} - Z_1 \bar{Z}'_1 > 0, Z'_1 = Z_1 - \text{симметричные матрицы}\}$ – классическая область Картана второго типа, $B_n[m \times m]_{\mathbb{C}} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I^{(m)} - \langle Z, Z \rangle > 0, Z'_j = Z_j\}$ – матричный шар второго типа [4];

при $n = 1, m = k$, $B_1[m \times m]_{\mathbb{K}\mathbb{C}} = \{Z_1 \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} + Z_1 \bar{Z}'_1 > 0, Z'_1 = -Z_1 - \text{косимметричные матрицы}\}$ – классическая область Картана третьего типа, $B_n[m \times m]_{\mathbb{K}\mathbb{C}} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m] : I^{(m)} + \langle Z, Z \rangle > 0, Z'_j = -Z_j\}$ – матричный шар третьего типа [4].

2. Задачи.

1) Вычислить голоморфные автоморфизмы множества $B_n[m \times k]$.

2) Вычислить ядро Бергмана–Хуа Ло-кена для $B_n[m \times k]$.

3) Получить интегральные формулы Коши–Сеге–Хуа Ло-кена для $B_n[m \times k]$.

Литература

1. **Хуа Ло-кен.** *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.* ИЛ.: Москва, 1954. - 168 с.
2. **Пятецкий-Шапиро И. И.** *Геметрия классических областей и теория автоморфных функций.* Москва, 1961. - 192 с.

3. Рудин У. *Теория функций в единичном шаре из \mathbb{C}^n* . Москва: Мир, 1984.
4. Худайбергенов Г., Кытманов А. М., Шаимкулов Б. А. *Анализ в матричных областях*. Монография. Сибирский федеральный университет, 2017. - 296 с.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛАХ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Худайбергенов Г., Курбанов Б. Т.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, gkhudaiberg@mail.ru

Довольно часто задачи, поставленные для единичного круга на плоскости, переносятся на верхнюю полуплоскость при помощи преобразования Кэли

$$w = \frac{i(1+z)}{1-z}.$$

В этой связи является актуальным нахождение многомерных аналогов формулы для реализации типа "единичный круг - верхняя полуплоскость". В статье рассмотрена реализация классической области первого типа в виде области Зигеля второго рода и выписаны некоторые интегральные формулы.

Пусть D - полная выпуклая ограниченная круговая область с центром в начале координат, граница Шилова (остов) R которой является гладким многообразием, либо неограниченная однородная область Зигеля второго рода с остовом R .

Функция f принадлежит классу $L^p(R)$, с заданной на нем мерой Лебега $d\mu$, если она интегрируема со степенью p по мере $d\mu$ на R , т.е. если

$$\int_R |f(x)|^p d\mu$$

конечен.

Класс Харди $H^p(D)$ ($0 < p < \infty$) состоит из всех функций f , голоморфных в области D для которых равномерно ограничены интегралы

$$\int_R |f(rz)|^p d\mu < C,$$

для всех $0 < r < 1$.

Через $\mathcal{O}^2(D)$ обозначим пространство, состоящее из голоморфных функций в D , интегрируемых с квадратом по обычной мере Лебега $d\nu$, т.е. $f \in \mathcal{O}^2(D)$, если f голоморфна

в D и

$$\int_R |f(\xi)|^p d\nu(\xi) < +\infty.$$

Известно, что любая ограниченная однородная (по отношению к голоморфным автоморфизмам) область в \mathbb{C}^N имеет реализацию в виде области Зигеля второго рода. В частности, область R_1 биголоморфно эквивалентна некоторой области Зигеля второго рода, которая строится с помощью следующей конструкции (см. [6]).

Пусть U_1 – квадратная матрица порядка $p \times p$, а U_2 – матрица порядка $p \times q - p$. В пространстве пар матриц (U_1, U_2) комплексной размерности $N = pq$ рассмотрим область

$$D = \{U = (U_1, U_2) \in \mathbb{C}[p \times q] : ImU_1 - U_2U_2^* > 0\},$$

где $ImU_1 = \frac{1}{2i}(U_1 - U_1^*)$.

Остов этой области обозначим

$$G = \{U = (U_1, U_2) \in \mathbb{C}[p \times q] : ImU_1 - U_2U_2^* = 0\}.$$

Следуя этой конструкции, область R_1 можно задать и в следующей форме:

$$R_1 = \{Z = (Z_1, Z_2) \in \mathbb{C}[p \times q] : I - \langle Z, Z \rangle > 0\}.$$

здесь $\langle Z, Z \rangle = Z_1Z_1^* + Z_2Z_2^*$, а Z_1 и Z_2 матрицы порядка $p \times p$ и $p \times q - p$ соответственно.

Обозначим через $d\mu$ и $d\mu$ – нормированные меры Лебега в D и G а через $d\nu$ и $d\sigma$ – нормированные меры Лебега в R_1 и S_1 соответственно.

Теорема 1. *Отображение $\Phi : \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_u$ определяемое соответствиями*

$$U_1 = i(I - Z_1)^{-1}(I + Z_1), U_2 = (I - Z_1)^{-1}Z_2 \quad (-3)$$

биголоморфно отображает область R_1 на D , при этом S_1 переходит в G .

Как известно, ядро Бергмана в R_1 имеет вид (см. [1, гл.4]):

$$K_{R_1}(U, V) = \frac{1}{(\det(I - \langle Z, W \rangle))^{p+q}}.$$

Лемма 1. *При отображении (1) ядро Бергмана $K(U, V)$ преобразуется следующим образом:*

$$K(\Phi(Z), \Phi(W)) = \frac{1}{2^{2p^2}} K_{R_1}(Z, W) (\det[(I - Z_1)(I - W_1^*)])^{p+q}.$$

Теорема 2. *Для всякой функции $f \in \mathcal{O}^2(D)$ справедлива формула*

$$f(U) = \int_D f(V) K(U, V) d\mu(V), U \in D.$$

Интеграл в этой формуле задает ортогональный проектор из пространства $L^2(D)$ в пространство $\mathcal{O}^2(D)$.

Литература

1. **Хуа Ло-кен.** *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.* Москва, 1959.
2. **Рудин У.** *Теория функций в единичном шаре из \mathbb{C}^n .* Москва: Мир, 1984.
3. **Худайбергенов Г., Кытманов А. М., Шаимкулов Б. А.** *Комплексный анализ в матричных областях.* Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2017.
4. **Косбергенов С., Кытманов А. М., Мысливец С. Г.** *О граничной теореме Морера для классических областей.* Сибирский математический журнал. 1999, Т.40, №3, с. 595-604.
5. **Кытманов А. М., Мысливец С. Г.** *Об одном граничном аналоге теоремы Морера.* Сибирский математический журнал. 1995. Т.36, №6. С. 1350-1353.
6. **Фукс Б.А.** *Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных.* УМ.: Физматгиз, 1962.
7. **Koranyi A.** *The Poisson integral for the generalized half planes and bounded symmetric domains.* Ann.Math.1965.V.82. №2.P.332-350.

КОЭФФИЦИЕНТЫ ОПТИМАЛЬНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Шадиметов Х. М., Нуралиев Ф. А.

Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Здесь мы рассмотрим интерполяционную формулу вида

$$\varphi(z) \cong P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)\varphi(h\beta) + A(z)\varphi'(0) + B(z)\varphi'(1) \quad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x, z) = \delta(x - z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)\delta(x - h\beta) + A(z)\delta'(x) + B(z)\delta'(x - 1). \quad (2)$$

где $C_\beta(z), A(z), B(z)$ - коэффициенты, а $h = 1/N, N \in \mathbb{N}, \delta$ - дельта функция Дирака, $\varphi \in L_2^{(m)}(0, 1)$.

Разность $\varphi(x) - P_\varphi(x)$ называется *погрешностью* интерполяционной формулы (1). Значение этой погрешности на некоторой точке z является линейным функционалом над функциями φ , т.е.

$$(\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell \varphi dx = \varphi(z) - P_\varphi(z).$$

В работе [1] для интерполяционной формулы (1) с функционалом погрешности (2) найдена экстремальная функция в пространстве $L_2^{(m)}(0, 1)$, вычислен квадрат нормы функционала погрешности, минимизируя норму функционала погрешности по коэффициентам $C_\beta(z), A(z), B(z)$ получена следующая система линейных алгебраических уравнений для нахождения оптимальных коэффициентов интерполяционных формул вида (1):

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) \frac{|h\beta - h\gamma|^5}{2 \cdot 5!} - A(z) \frac{(h\beta)^4}{2 \cdot 4!} + B(z) \frac{(h\beta - 1)^4}{2 \cdot 4!} + \sum_{\alpha=0}^2 \lambda_\alpha (h\beta)^\alpha = \frac{|z - h\beta|^5}{2 \cdot 5!}, \beta = \overline{0, N},$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) (h\gamma)^4 = z^4 - 4B(z) + 2 \cdot 4! \lambda_1,$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) (h\gamma)^3 = z^3 - 3B(z) + 4! \lambda_1 + 4! \lambda_2,$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) (h\gamma)^2 = z^2 - 2B(z),$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) h\gamma = z - A(z) - B(z),$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_\gamma(z) = 1.$$

В настоящей работе нами решена последняя система и доказана следующая

Теорема. *Оптимальные коэффициенты интерполяционных формул вида (1) с функционалом погрешности (2) в пространстве $L_2^{(3)}(0, 1)$ имеют вид:*

$$C_0(z) = \frac{1}{2h^5} \left[-32z^5 + |z - h|^5 + (z + h)^5 - 10Ah^4 + 240(\lambda_1 + 2\lambda_2)h^2 + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{q_k} \left(\sum_{\gamma=0}^N q_k^\gamma |z - h\gamma|^5 + M_k + q_k^N N_k \right) \right],$$

$$C_\beta(z) = \frac{1}{2h^5} [|z - h(\beta - 1)|^5 - 32|z - h\beta|^5 + |z - h(\beta + 1)|^5 +$$

$$+ \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{q_k} \left(\sum_{\gamma=0}^N q_k^{|\beta-\gamma|} |z - h\gamma|^5 + q_k^\beta M_k + q_k^{N-\beta} N_k \right)], \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$C_N(z) = \frac{1}{2h^5} [-32(1-z)^5 + |z - h(N-1)|^5 + (h+1-z)^5 + 10Bh^4 - 240\lambda_1 h^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{q_k} \left(\sum_{\gamma=0}^N q_k^{N-\gamma} |z - h\gamma|^5 + q_k^N M_k + N_k \right)].$$

$A(z)$ и $B(z)$ определяются из системы

$$A(z) \left[-\frac{h^4}{24} \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h\gamma + h\beta)\gamma^4 \right] + B(z) \left[\frac{h^4}{24} \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(N+\gamma) - h\beta)\gamma^4 \right] +$$

$$+ \lambda_1(z) \left[h^2 \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h\gamma + h\beta)\gamma^2 - h^2 \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h(N+\gamma) - h\beta)\gamma^2 \right] +$$

$$+ 2\lambda_2(z) \left[h^2 \sum_{\gamma=1}^{\infty} D_3(h\gamma + h\beta)\gamma^2 \right] = -\frac{1}{240} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D_3(h\beta - h\gamma) |z - h\gamma|^5$$

при $\beta = -1$, $\beta = -2$ и $\beta = N+1$, $\beta = N+2$. Здесь $D_3(h\beta)$ - дискретный аналог оператора $\frac{d^6}{dx^6}$ [2].

Следует отметить, что построенная интерполяционная формула является сплайном пятой степени и точна для многочленов степени ≤ 3 .

Литература

1. **Нуралиев Ф. А.** Оптимальная интерполяционная формула типа Эрмита. Узбекский математический журнал. 2010. №4. с. 158-164.
2. **Шадиметов Х. М.** Дискретный аналог оператора d^{2m}/dx^{2m} и его построение. Вопр. вычисл. и прикл. математики. - Ташкент, 1985, вып. 79, с. 22-35.

ДИНАМИКА КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Эшимбетов М. Р.¹, Таджиева М. А.²

¹Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан,
eshimbetov1989@mail.ru

²Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, mohbonut@mail.ru

Как известно [1], динамика отображения комплексной плоскости \mathbb{C} в себя определяемого как $z \mapsto z^2 + c$ является довольно сложной. Изучение этого отображения посвящена многочисленная литература начиная с классических работ Фату и Жюлиа. При этом существенно используются глубокие результаты из комплексного анализа. С другой стороны ясно, что данное отображение можно рассматривать как динамику функции $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где

$$(x; y) \mapsto (x^2 - y^2 + c_1, 2xy + c_2). \quad (1)$$

Исходя из этого рассмотрим семейство квадратичных отображений $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вида

$$F(x, y) = (a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2, a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2).$$

Очевидно, если $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ линейный функционал, то $f(F(x, y))$ является квадратичной формой двух переменных x и y .

Определение. Квадратичное отображение $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется эллиптическим, если для некоторого линейного функционала f квадратичная форма $f(F(x, y))$ положительно определена, гиперболическим, если для любого $f \neq 0$ квадратичная форма $f(F(x, y))$ -знакопеременна. Согласно этого определения $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ является гиперболическим, а $F(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ -эллиптическим квадратичным отображением.

В данной работе изучаются динамические свойства квадратичных отображений \mathbb{R}^2 эллиптического типа. В частности, рассмотрено семейство отображений

$$F(x, y, c) = (x^2 + y^2 + c_1, 2xy + c_2).$$

Пусть $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$ произвольная начальная точка. Траектория F начинающаяся из точки (x^0, y^0) определяется рекуррентными равенствами:

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = (x^{(n)})^2 + (y^{(n)})^2 + c_1, \\ y^{(n+1)} = 2x^{(n)}y^{(n)} + c_2. \end{cases} \quad (2)$$

Ясно что, $x^{(1)} \pm y^{(1)} = (x \pm y)^2 + c_1 \pm c_2$. Отсюда если, $t = x \pm y$ и $c = c_1 \pm c_2$, то отображение можно привести к виду $f(t) = t^2 + c, c \in \mathbb{R}$. Сначала мы изучим динамические свойства

отображения $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Теорема 1. а. Если $c < \frac{1}{4}$, тогда f имеет две неподвижные точки $x_1 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$, более того, точка x_1 является отталкивающей; если $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, то точка x_2 является притягивающей; если $c < -\frac{3}{4}$, то точка x_2 является отталкивающей; б. если $c = \frac{1}{4}$, то f имеет единственную нейтральную неподвижную точку $x = \frac{1}{2}$ и более того, если $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, то $f^n \rightarrow \frac{1}{2}$ при $n \rightarrow \infty$; в) если $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$, тогда f имеет два притягивающих цикла, $\{q_1, q_2\}$, где $q_1 = -\frac{1+\sqrt{-4c-3}}{2}$ и $q_2 = -\frac{1-\sqrt{-4c-3}}{2}$; если $c < -\frac{5}{4}$, тогда f имеет два отталкивающих цикла $\{q_1, q_2\}$; е) если $c = -\frac{3}{4}$, то f имеет две неподвижные точки: $x_1 = \frac{3}{2}$ отталкивающую и $x_2 = -\frac{1}{2}$ нейтральную, более того, если $x \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, то $f^n \rightarrow -\frac{1}{2}$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Если $c \in (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{4}, +\infty)$, то $f^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 3. а) Если $c_1 \pm c_2 < \frac{1}{4}$, тогда f имеет две неподвижные точки $x \pm y = \frac{1+\sqrt{1-4(c_1 \pm c_2)}}{2}$ и $x \pm y = \frac{1-\sqrt{1-4(c_1 \pm c_2)}}{2}$, более того, точки $x \pm y = \frac{1+\sqrt{1-4(c_1 \pm c_2)}}{2}$ являются отталкивающими; если $-\frac{3}{4} < c_1 \pm c_2 < \frac{1}{4}$, то точки $x \pm y = \frac{1-\sqrt{1-4(c_1 \pm c_2)}}{2}$ являются притягивающими; если $c_1 \pm c_2 < -\frac{3}{4}$, то точки $x \pm y = \frac{1-\sqrt{1-4(c_1 \pm c_2)}}{2}$ являются отталкивающими; б) если $c_1 \pm c_2 = \frac{1}{4}$, то f имеет единственную нейтральную неподвижную точку $x \pm y = \frac{1}{2}$ и более того если, $x \pm y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, то $f^n \rightarrow \frac{1}{2}$ при $n \rightarrow \infty$; в) если $-\frac{5}{4} < c_1 \pm c_2 < -\frac{3}{4}$, то $\{q_1, q_2\}$ является притягивающим 2-циклом, где $q_1 = \frac{-1-\sqrt{-4(c_1 \pm c_2)-3}}{2}$ и $q_2 = \frac{-1+\sqrt{-4(c_1 \pm c_2)-3}}{2}$; если $c_1 \pm c_2 < -\frac{5}{4}$, то $\{q_1, q_2\}$ является отталкивающим 2-циклом, для f ; е) если $c_1 \pm c_2 = -\frac{3}{4}$, то f имеет две неподвижные точки: $x \pm y = \frac{3}{2}$ отталкивающую и $x \pm y = -\frac{1}{2}$ нейтральную, более того, если $x \pm y \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, тогда $f^n \rightarrow -\frac{1}{2}$ при $n \rightarrow \infty$.

Литература

1. **Holmgren R. A.** "A First Course in Discrete Dynamical Systems". Springer - Verlag New York, 1994, p. 214.
2. **Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.** "Динамика одномерных отображений". Киев Наукова думка 1989, ст. 218.

О ПОНЯТИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА

Эшмаматова Д. Б.¹, Ганиходжаев Р. Н.²

¹Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Ташкент,
Узбекистан, 24dil@mail.ru

²Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
rganikhodzhaev@gmail.com

Теория динамических систем является одним из наиболее развивающихся разделов математики лежащей на стыке математического анализа, дифференциальных уравнений, топологии, теории вероятностей. Развитие теории динамических систем стимулируется запросами ряда теоретических и прикладных задач физики, биологии, социальных наук. Квадратичный стохастический оператор $V : R^m \rightarrow R^m$ определяется заданием кубической матрицы $\{P_{ij,k}\}_{i,j,k=\overline{1,m}}$, с коэффициентами, удовлетворяющими условиям:

$$P_{ij,k} = P_{ji,k}0, \sum_{k=1}^m P_{ij,k} = 1$$

и действует по закону:

$$Vx = \left(\sum_{i,j=1}^m P_{ij,1}x_i x_j, \sum_{i,j=1}^m P_{ij,2}x_i x_j, \dots, \sum_{i,j=1}^m P_{ij,m}x_i x_j \right), \text{ где } x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m.$$

Не сложно заметить, что квадратичный стохастический оператор оставляет инвариантной гиперплоскость $H = \left\{ x \in R^m : \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$, а также базисными симплекс $S^{m-1} = \left\{ x \in R^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$.

Определение [1]. Квадратичный стохастический оператор (далее к.с.о.) называется вольтерровским, если $P_{ij,k} = 0$ при $k \neq i$ или j .

Известно [1], вольтерровский к.с.о. на симплексе S^{m-1} всегда может быть представлен в виде:

$$x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где

$$a_{ki} = -a_{ik}, |a_{ki}| \leq 1 \quad (2)$$

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между вольтерровскими к.с.о. и кососимметрическими матрицами $A = (a_{ki})_{k,i=\overline{1,m}}$ с коэффициентами, a_{ki} удовлетворяющими условиям (2).

Одним из важнейших понятий в теории динамических систем является понятие трансверсальности отображений. К сожалению, в общем случае условие трансверсальности является труднопроверяемым условием. Основная цель состоит в получении необходимого и достаточного критерия для трансверсальности квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа.

Определение 1. *Кососимметрическая матрица A называется трансверсальной, если любой главный минор четного порядка положителен.*

Определение 2. *Вольтерровский оператор V также называется трансверсальным, если его матрица A является трансверсальной.*

Определение 3. *Открытое и всюду плотное подмножество топологического пространства называется массивным подмножеством.*

Теорема 1. *Множество всех трансверсальных операторов вольтерровского типа образуют открытое и всюду плотное подмножество, т.е. является массивным подмножеством, множества всех операторов вольтерровского типа.*

Литература

1. Ганиходжаев Р. Н. Об одном семействе квадратичных стохастических операторов, действующих в S^2 . Доклады АН УЗ ССР, 1989, №1, с. 3-5.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕРВАЛЬНОГО ВАРИАНТА ПЯТИТОЧЕЧНОЙ ПРОГОНКИ

Юлдашев З. Х.¹, Ибрагимов А. А.², Ходжабаев Ф. Д.³

¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, ziyaut@mail.ru

²Навоийский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан,
alim-ibragimov@mail.ru

³Навоийский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан,
fara-frenk@mail.ru

В [1] описаны и обоснованы некоторые интервальные варианты метода прогонки. При этом расчетные формулы берутся в форме естественных интервальных расширений, а обоснование предполагает получение достаточных условий реализуемости и устойчивости метода.

Под реализуемостью в интервальной арифметике понимается отсутствие деления на интервал содержащий нуль, а под устойчивостью – ограниченное влияние ошибки допущенной при вычислении решения на некотором этапе на конечный результат.

В дальнейшем изложении мы пользуемся обозначениями из проекта неформального международного стандарта [2]. В частности, интервальные величины выделяются в тексте **жирным** шрифтом, а неинтервальные никак не выделяются.

Итак, рассматриваем интервальную систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{S}u = \mathbf{f} \quad (1)$$

где $\mathbf{S} \in \mathbb{IR}^{(n+1) \times (n+1)}$ – пятидиагональная интервальная матрица, $\mathbf{f} \in \mathbb{IR}^{(n+1)}$ – интервальный вектор правой части.

В качестве множество решений для системы (1), будем рассматривать так называемое *объединенное множество решений*:

$$\Xi_{uni}(\mathbf{S}, \mathbf{f}) = \tilde{\mathbf{u}} = \{\tilde{u} \in \mathbb{R}^{(n+1)} \mid (\exists S \in \mathbf{S}) (\exists f \in \mathbf{f}) (S\tilde{u} = f)\}.$$

В отношении $\Xi_{uni}(\mathbf{S}, \mathbf{f})$ ставится задача *внешнего интервального оценивания*:

$$\text{найти брус } \mathbf{U} \in \mathbb{IR}^{(n+1)}, \text{ такой что } \Xi_{uni}(\mathbf{S}, \mathbf{f}) \subset \mathbf{U}.$$

В данной задаче нас интересует \mathbf{U} , в котором оценивает Ξ_{uni} извне наиболее точно или наиболее близок к Ξ_{uni} в некотором смысле. Здесь *брусом* мы называем подмножество \mathbb{R}^{n+1} , которое является декартовым произведением $n + 1$ интервалов.

Полагая, что $\tilde{u}_i \in \tilde{\mathbf{u}}_i$, мы можем записывать систему (1) в наиболее определенном виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{c}_0 \tilde{u}_0 + \mathbf{d}_0 \tilde{u}_1 + \mathbf{e}_0 \tilde{u}_2 &= \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{b}_1 \tilde{u}_0 + \mathbf{c}_1 \tilde{u}_1 + \mathbf{d}_1 \tilde{u}_2 + \mathbf{e}_1 \tilde{u}_3 &= \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{a}_i \tilde{u}_{i-2} + \mathbf{b}_i \tilde{u}_{i-1} + \mathbf{c}_i \tilde{u}_i + \mathbf{d}_i \tilde{u}_{i+1} + \mathbf{e}_i \tilde{u}_{i+2} &= \mathbf{f}_i \quad i = \overline{2, n-2}, \\ \mathbf{a}_{n-1} \tilde{u}_{n-3} + \mathbf{b}_{n-1} \tilde{u}_{n-2} + \mathbf{c}_{n-1} \tilde{u}_{n-1} + \mathbf{d}_{n-1} \tilde{u}_n &= \mathbf{f}_{n-1} \\ \mathbf{a}_n \tilde{u}_{n-2} + \mathbf{b}_n \tilde{u}_{n-1} + \mathbf{c}_n \tilde{u}_n &= \mathbf{f}_n \end{aligned} \right\}$$

где

$$\mathbf{a}_i, (i = \overline{2, n}); \quad \mathbf{b}_i, (i = \overline{1, n}); \quad \mathbf{c}_i, (i = \overline{0, n}); \quad \mathbf{d}_i, (i = \overline{0, n-1}); \quad \mathbf{e}_i, (i = \overline{0, n-2})$$

– соответствующие диагональные элементы интервальной матрицы \mathbf{S} .

По формулам пятиточечной прогонки [1] вычисляются интервалы \mathbf{u}_i , такие что $\tilde{\mathbf{u}}_i \subseteq \mathbf{u}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Здесь \mathbf{u}_i некоторое множество, $\tilde{\mathbf{u}}_i$ интервалы полученные переходом в соответствующих вещественных расчетных формулах к естественным интервальным расширениям.

Для реализуемости и устойчивости предлагаемого варианта метода пятиточечной прогонки достаточными являются условия *теоремы 9* из [1, стр. 46], которые в наших рассуждениях предполагаются выполненными.

Сформулирована и доказана следующая

Теорема. Пусть коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} 0 \notin \mathbf{a}_i, \quad i = \overline{2, n}; \quad 0 \notin \mathbf{b}_i, \quad i = \overline{1, n}; \\ 0 \notin \mathbf{d}_i, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad 0 \notin \mathbf{e}_i, \quad i = \overline{0, n-2}; \\ 0 \notin \mathbf{c}_i, \quad i = \overline{0, n}; \\ \langle \mathbf{c}_0 \rangle = |\mathbf{d}_0| + |\mathbf{e}_0| + \varepsilon_0, \\ \langle \mathbf{c}_1 \rangle = |\mathbf{b}_1| + |\mathbf{d}_1| + |\mathbf{e}_1| + \varepsilon_1, \\ \langle \mathbf{c}_n \rangle = |\mathbf{a}_n| + |\mathbf{b}_n| + \varepsilon_n, \\ \langle \mathbf{c}_{n-1} \rangle = |\mathbf{a}_{n-1}| + |\mathbf{b}_{n-1}| + |\mathbf{d}_{n-1}| + \varepsilon_{n-1}, \\ \langle \mathbf{c}_i \rangle = |\mathbf{a}_i| + |\mathbf{b}_i| + |\mathbf{d}_i| + |\mathbf{e}_i| + \varepsilon_i, \quad i = \overline{2, n-2}. \end{aligned}$$

Тогда метод пятиточечной прогонки может быть реализован в рамках машинной интервальной арифметики [3], а для соответствующих погрешностей имеет место оценки

$$\begin{aligned} |\delta \mathbf{x}_i| &\leq \bar{\xi}_1 \bar{\tau}, \\ |\delta \mathbf{z}_i| &\leq \bar{\xi}_5 \bar{\tau}, \\ |\delta \mathbf{v}_i| &\leq \bar{\xi}_6 \bar{\tau}, \\ |\delta \hat{\mathbf{u}}_n| &\leq \bar{\xi}_7 \bar{\tau} + \bar{\xi}_5 \bar{\xi}_6 \bar{\tau}^2 \\ |\delta \hat{\mathbf{u}}_{n-1}| &\leq \bar{\xi}_5 \bar{\xi}_6 \bar{\tau}^2 + \bar{\xi}_8 \bar{\tau} \\ |\delta \hat{\mathbf{u}}_{n-i}| &\leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)^{i-1} O(n^3) \bar{\tau}^3, \end{aligned}$$

где $\bar{\tau} = \max\{\bar{\tau}_i, \bar{\tau}_i\}$ – интервал, возникающий за счет ошибок округлений и корректировок к внешним интервалам, $\bar{m} = \{|\mathbf{a}_i|, |\mathbf{b}_i|, |\mathbf{c}_i|, |\mathbf{d}_i|, |\mathbf{e}_i|, |\mathbf{f}_i|\}$, а $\bar{\xi}_i$ константы не зависящие от i и τ .

Литература

1. Кальмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. *Методы интервального анализа*. – Новосибирск: Наука, 1986.
2. Kearfott R. B., Nakao M. T., Neumaier A., Rump S. M., Shary S. P., Hentenryck P. *Standardized notation in interval analysis*. Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, №1. С. 7–13. <http://www.ict.nsc.ru/interval/InteNotation.ps>.
3. Alefeld G., Herzberger J. *Introduction to interval computations*. Academic Press, New York, 1983.

**О ДРОБНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ АДАМАРА В
КУСОЧНО-СТЕПЕННЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ**

Яхшибоев М. У.

*Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий,
Самарканд, Узбекистан, yahshiboev@rambler.ru*

Введенное Ж. Адамаром [1] дробное интегродифференцирование типа $(x \frac{d}{dx})^\alpha$, $-\infty < \alpha < \infty$, является инвариантными относительно оператора растяжения $(\Pi_\rho f)(x) = f(\rho x)$, $\rho > 0, x > 0$. Ряд свойств дробного интегродифференцирования по Адамару можно найти в книге [2], §18.

На действительной полуоси рассматриваются интегральные операторы Адамара

$$J_{+\alpha}^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \varphi(t) \frac{dt}{t}, \quad J_{-\alpha}^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \left(\ln \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} \varphi(t) \frac{dt}{t}$$

в пространстве

$$X_{\gamma,\nu}^p = \left\{ \varphi : \int_0^1 x^{-\gamma} |\varphi(x)|^p \frac{dx}{x} + \int_1^\infty x^{-\nu} |\varphi(x)|^p \frac{dx}{x} < \infty, \gamma > 0, \nu > 0, 1 \leq p < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|\varphi\|_{X_{\gamma,\nu}^p} = \left\{ \int_0^1 |\varphi(x)|^p x^{-\gamma} \frac{dx}{x} + \int_1^\infty |\varphi(x)|^p x^{-\nu} \frac{dx}{x} \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha)$ - гамма функция.

В данной работе рассматривается ограниченность Адамаровское дробное интегрирование функций одного переменного в пространства $X_{\gamma,\nu}^p$.

Введем модификацию дробных интегралов с ядром, улучшенным на бесконечности:

$$(J_{+,\tau}^{\alpha,l} \varphi)(x) = \int_0^\infty \Delta_{l,\alpha}^+ \left(\ln \frac{1}{t}, \ln \frac{1}{\tau} \right) \varphi(x \cdot t) \frac{dt}{t}, \tag{-3}$$

$$(J_{-,\tau}^{\alpha,l} \varphi)(x) = \int_0^\infty \Delta_{l,\alpha}^+ \left(\ln \frac{1}{t}, \ln \frac{1}{\tau} \right) \varphi(x \cdot t^{-1}) \frac{dt}{t}, \tag{-3}$$

где $\tau \in R_+^1$, $\Delta_{l,\alpha}^+(y, \xi) = \left(\tilde{\Delta}_\xi^l k_\alpha^+ \right)(y)$, $k_\alpha^+(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y_+^{\alpha-1}$, $l > \alpha > 0, u_+^{\alpha-1} = \begin{cases} u^{\alpha-1}, & u > 0 \\ 0, & u < 0. \end{cases}$

Очевидно, $J_{\pm,\tau}^{\alpha,l} \varphi = \tilde{\Delta}_\tau^l J_{\pm}^\alpha \varphi$ на достаточно хороших функциях $\varphi(x)$, т.е. операторы (-) () получаются применением разностных операторов $\tilde{\Delta}_\tau^l$ с кмультимпликативным шагом к оператору $J_{\pm}^\alpha \varphi$. Они имеют то преимущество по сравнению с $J_{\pm}^\alpha \varphi$, что при $l > \alpha > 0$, они ограничены в пространстве $X_{\gamma,\nu}^p$ при всех $1 \leq p < \infty, \gamma > 0, \nu > 0$ (т.е. включая в случай

$\gamma = 0, \nu = 0$). Имеет место следующая

Теорема 1. Операторы J_{\pm}^{α} , $\alpha > 0$ ограниченные в пространстве $X_{\gamma, \nu}^p$ при $1 \leq p < \infty, \gamma > 0, \nu > 0$

$$\|J_{\pm}^{\alpha} \varphi\|_{X_{\gamma, \nu}^p} \leq c_p \|\varphi\|_{X_{\gamma, \nu}^p},$$

где $c_p = \left(\frac{p}{m}\right)^{\alpha}$ для оператора J_{+}^{α} , $c_p = \left(\frac{p}{M}\right)^{\alpha}$ и для оператора J_{-}^{α} , $m = \min(\gamma, \nu)$ $M = \max(\gamma, \nu)$.

Теорема 2. Операторы $J_{\pm, \tau}^{\alpha, l}$ ограничены в пространстве $X_{\gamma, \nu}^p$ при всех $1 \leq p < \infty, \gamma > 0, \nu > 0$

$$\|J_{\pm, \tau}^{\alpha, l} \varphi\|_{X_{\gamma, \nu}^p} \leq c(\tau) \|\varphi\|_{X_{\gamma, \nu}^p},$$

где $0 < c(\tau) < 1, l > \alpha > 0$.

Литература

1. **Hadamard J.** *Essai sur l'etude des fonctions donne'cs par leur development de Taylor.* J.math pures et appl., 1892, ser. 4. T.8, p. 101-186.
2. **Самко С. Г., Килбас А. А., Марчичев О. И.** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск. Из-во. "Наука и техника", 1987, с. 688.